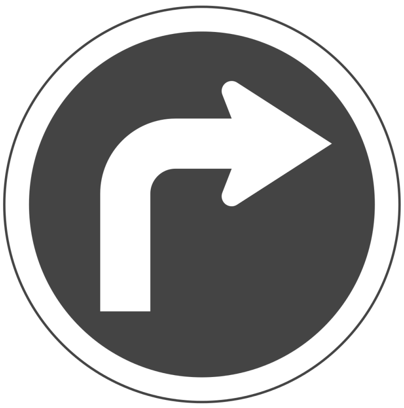
Milan Hladík

Základy Nelineární Optimalizace

text k přednášce

20. ledna 2021



Tento text zatím slouží jako sylabus přednášky Základy Nelineární Optimalizace na studiu informatiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Autor čerpal především z knih Bazaraa et al. [2006]; Boyd and Vandenberghe [2004].

Případné připomínky a chyby zasílejte prosím na adresu hladik@kam.mff.cuni.cz.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Úlohou optimalizace (matematického programování) se rozumí úloha

$$\min\ f(x) \quad \text{za podm.}\ \ x \in M$$

kde $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je *účelová funkce* a $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je *množina přípustných řešení*. Množina M je navíc popsána soustavou

$$\begin{aligned} g_j(x) &\le 0, \quad j = 1, \ldots, J, \\ h_\ell(x) &= 0, \quad \ell = 1, \ldots, L, \end{aligned}$$

kde $g_j(x), h_\ell(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Optimální řešení lze kategorizovat na několik typů. Bod $x^* \in M$ se nazývá

- *(globální) minimum* pokud $f(x^*) \le f(x)$ pro všechna $x \in M$,
- *ostré (globální) minimum* pokud $f(x^*) < f(x)$ pro všechna $x^* \neq x \in M$,
- *lokální minimum* pokud $f(x^*) \le f(x)$ pro všechna $x \in M \cap \mathcal{O}_\varepsilon(x^*)$,
- *ostré lokální minimum* pokud $f(x^*) < f(x)$ pro všechna $x^* \neq x \in M \cap \mathcal{O}_\varepsilon(x^*)$.

Podle typu účelové funkce a množiny přípustných řešení rozdělujeme obecnou úlohu na několik tříd:

- *Lineární programování.* Funkce $f(x)$, $g_j(x)$, $h_\ell(x)$ jsou lineární. Předpokládáme, že čtenář má základní znalosti o lineárním programování.
- *Optimalizace bez omezení.* Zde $M = \mathbb{R}^n$.
- *Konvexní programování.* Funkce $f(x)$, $g_j(x)$, jsou konvexní a $h_\ell(x)$ jsou lineární.

S dalšími typy se setkáme časem, viz kapitola 2.

1.1 Konvexita

Stručné připomenutí konvexních množin, funkcí a optimalizačních úloh.

Konvexní množiny

Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je *konvexní*, pokud pro každé $x_1, x_2 \in M$ a každé $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, je konvexní kombinace $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in M$.

Důležitá vlastnost, týkající se konvexních množin, z pohledu optimalizace je oddělitelnost. Neprázdné množiny $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou *oddělitelné* pokud existuje vektor $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ a číslo $b \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\begin{aligned} a^T x &\le b \quad \forall x \in M, \\ a^T x &\ge b \quad \forall x \in N, \end{aligned}$$

a zároveň neplatí

$$a^T x = b \quad \forall x \in M \cup N.$$

Níže uvádíme jednu z variant vět o oddělitelnosti konvexních množin.

Věta 1.1 (O oddělitelnosti)**.** *Buďte $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdné a konvexní. Pak jsou oddělitelné právě tehdy, když* $\operatorname{ri} M \cap \operatorname{ri} N = \emptyset$.

Konvexní funkce

Různé ekvivalentní charakterizace konvexní funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ na konvexní množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$:

- Základní definice: pro každé $x_1, x_2 \in M$ a každé $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, platí

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

- Pomocí epigrafu

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x \in M,\ z \geq f(x)\}.$$

  Funkce $f(x)$ je konvexní právě tehdy, když je její epigraf konvexní množina.
- Pro diferencovatelné funkce: pro každé $x, y \in M$ platí

$$f(x) - f(y) \geq \nabla f(y)^T (x - y). \tag{1.1}$$

  Tedy tečna vytvořená v každém bodě $(y, f(y))$ grafu funkce musí ležet pod grafem funkce.
- Pro dvakrát diferencovatelné funkce: Hessián $\nabla^2 f(x)$ je positivně semidefinitní pro každé $x \in M$.

Silnější varianta konvexnosti: $f(x)$ je ryze konvexní pokud platí

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

pro všechny konvexní kombinace s $x_1 \neq x_2$ a $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Konvexní optimalizace

Úlohou konvexní optimalizace je

$$\min\ f(x) \ \text{ za podm. } \ x \in M$$

kde $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce a $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina. Často se uvažuje množina přípustných řešení M ve tvaru

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n;\ g_j(x) \leq 0,\ j = 1, \ldots, J\},$$

kde $g_j(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, J$, jsou konvexní funkce. Z konvexity funkcí $g_j(x)$ pak vyplývá, že M je konvexní množina.

Pro úlohu konvexní optimalizace platí:

- Každé lokální minimum je globálním minimem.
- Množina optimálních řešení je konvexní.
- Je-li $f(x)$ ryze konvexní funkce, pak optimální řešení je nanejvýš jedno.

Následující podmínka optimality je užitečný technický nástroj.

Věta 1.2. *Buď $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní a $f\colon M' \to \mathbb{R}$ konvexní a diferencovatelná na otevřené $M' \supseteq M$. Pak $x^* \in M$ je optimální řešení právě tehdy, když pro každé $y \in M$ je $\nabla f(x^*)^T (y - x^*) \geq 0$.*

Kapitola 2

Úlohy konvexní optimalizace

2.1 Kvadratické programování

Úlohou *kvadratického programování* je úloha

$$\min\ x^T C x + d^T x \quad \text{za podm.} \quad x \in M$$

kde $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická, $d \in \mathbb{R}^n$ a $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní polyedr. Pokud matice C je positivně semidefinitní, pak jde o konvexní úlohu, která se nazývá *konvexní kvadratické programování.*

Konvexní kvadratické programování je efektivně řešitelné v polynomiálním čase [Floudas and Pardalos, 2009, sekce „Complexity Theory: Quadratic Programming“]. V případě, že C není positivně semidefinitní, problém se stává NP-těžkým, dokonce i nalezení lokálního minima. Zajímavé je, že NP-těžkost platí i jen pokud jediné vlastní číslo matice C je záporné [Pardalos and Vavasis, 1991; Vavasis, 1991]. NP-těžkost speciálního případu s negativně definitní ukážeme dole; z estetických důvodů úlohu formulujeme ekvivalentně jako maximalizaci s positivně definitní maticí.

Věta 2.1. *Úloha* $\max_{x\in M} x^T C x$ *je NP-těžká i pro* C *positivně definitní.*

Důkaz. Redukcí z NP-úplné úlohy Set-Partitioning: Lze množinu daných čísel $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ rozdělit do dvou skupin se stejným součtem? Ekvivalentně, existuje $x \in \{\pm 1\}^n$ tak, že $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$? Tuto úlohu můžeme přeformulovat jako

$$\max \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{za podm.} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0,\ x \in [-1,1]^n.$$

Optimální hodnota této úlohy je n právě tehdy, když Set-Partitioning má řešení. Optimalizační úloha odpovídá předpisu, protože podmínky jsou lineární a účelová funkce má tvar $x^T C x$ pro $C = I_n$. □

Příklad 2.2 (Problém výběru portfolia)**.** Jedná se o učebnicový příklad použití konvexního kvadratického programování. Průkopníkem v této oblasti byl Harry Markowitz, nositel Nobelovy ceny za ekonomii z roku 1990, i když jeho výsledek je z už roku 1952.

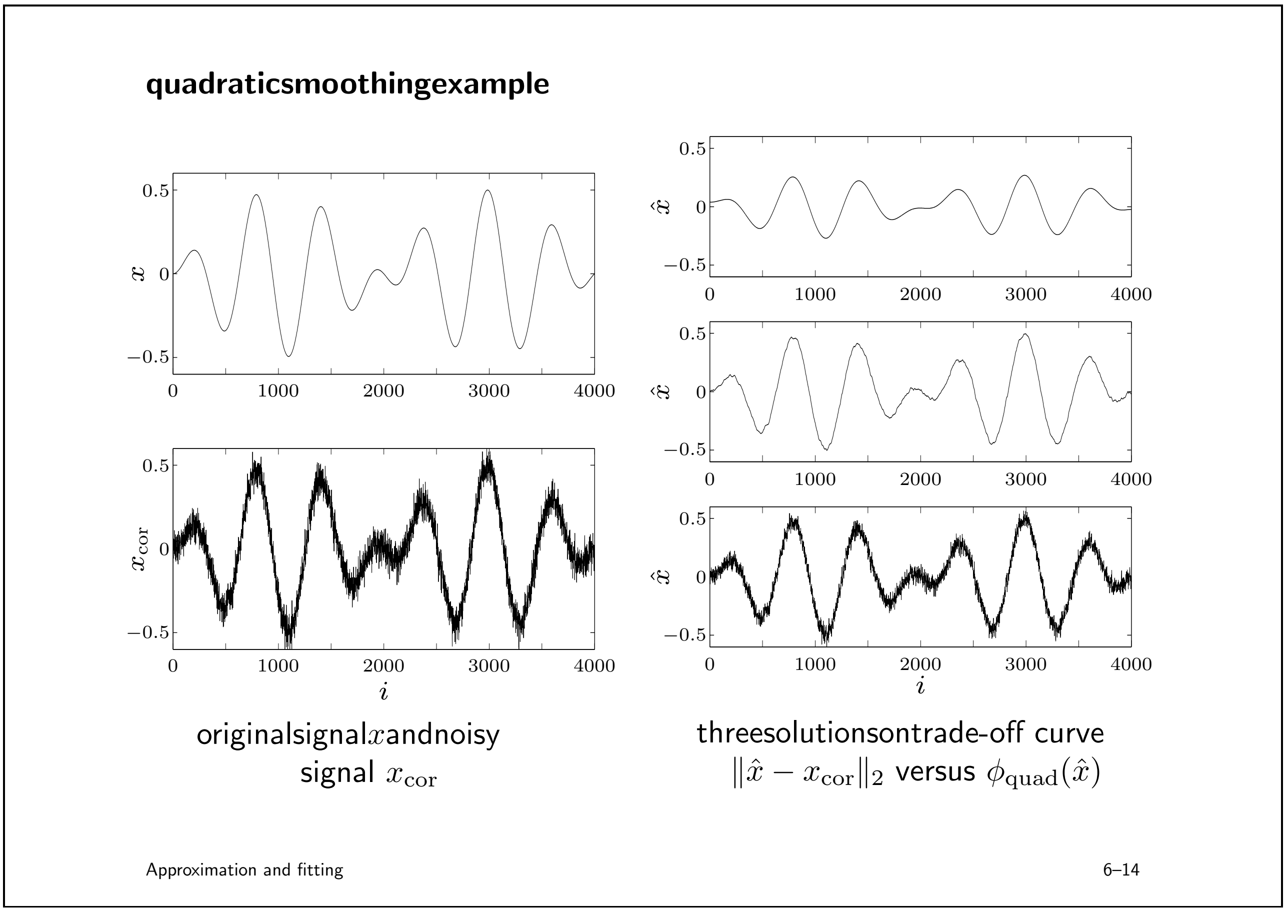
Základní úloha zní: Máme kapitál K a můžeme investovat to n investic, investice i vynese c_i jednotek peněz. Problém nalezení optimálního portfolia investic vede na triviální úlohu lineárního programování

$$\max\ c^T x \quad \text{za podm.} \quad e^T x = K,\ x \geq 0.$$

Výnos investic ale nebývá známý dopředu a modeluje se jako náhodná veličina. Nechť náhodný vektor c má střední hodnotu $\tilde{c} := \mathrm{E}\, c$ a kovarianční matici $\Sigma := \operatorname{cov} c = \mathrm{E}\,(c - \tilde{c})(c - \tilde{c})^T$, která je positivně semidefinitní. Pak pro reálný vektor $x \in \mathbb{R}^n$ máme, že střední hodnota $c^T x$ je $\mathrm{E}\,(c^T x) = \tilde{c}^T x$ a rozptyl $c^T x$ je $\operatorname{var}(c^T x) = x^T \Sigma x$.

Pokud bychom chtěli maximalizovat střední hodnotu výnosu, povede to na úlohu

$$\max\ \tilde{c}^T x \quad \text{za podm.} \quad e^T x = K,\ x \geq 0.$$



Obrázek 2.1: Příklad 2.3: vlevo původní signál a dole se šumem. Napravo očištěný signál se zmenšující se vahou γ.

Chceme-li vzít v úvahu riziko investic, modelujeme úlohu jako konvexní kvadratický program

$$\max\ \tilde{c}^T x - \gamma x^T \Sigma x \quad \text{za podm.} \quad e^T x = K,\ x \geq 0,$$

kde $\gamma > 0$ je tzv. parametr averze vůči riziku. □

Příklad 2.3 (Rekonstrukce signálu)**.** Nechť vektor $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ značí neznámý signál, a nechť $y = \tilde{x} + \mathrm{err}$ značí naměřený signál se šumem. Úkol zní zašuměný signál vyhladit a tedy najít dobrou aproximaci $\tilde{x}$. Budeme tedy hledat takový vektor $x \in \mathbb{R}^n$, aby byl dost blízko y a zároveň aby byl odpovídající signál vyhlazený, tj. nedocházelo k velkým skokům mezi sousedními hodnotami.

Tak zvané kvadratické vyhlazování pak vede na dvou-kriteriální úlohu

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ \|x - y\|_2^2,\ \textstyle\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2.$$

Tu typicky řešíme skalarizací

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ \|x - y\|_2^2 + \gamma \textstyle\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2,$$

kde $\gamma > 0$ je daný parametr. Menší hodnota γ upřednostňuje první kriterium, tedy signál je blíže naměřenému, zatímco větší γ vede na vyhlazenější signál.

Grafické porovnání je k dispozici na obrázku 2.1, který pochází z webových stránek:

`http://stanford.edu/class/ee364a/lectures/approx.pdf`

Podobný přístup se používá i pro analýzu a zpracování obrázků, pro problémy odstranění neostrostí a rozmazanosti, rekonstrukci poničených obrázků atp. Viz webové stránky

`http://www.imm.dtu.dk/~pcha/mxTV/` □

2.2 Geometrické programování

Úlohou *geometrického programování* je úloha

$$\begin{aligned} \min\ & \sum_{j=1}^{k} c_j x_1^{\gamma_{j1}} \dots x_n^{\gamma_{jn}} \\ \text{za podm.}\ & \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} x_1^{\alpha_{i_j 1}} \dots x_n^{\alpha_{i_j n}} \le 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ & b_i x_1^{\beta_{i1}} \dots x_n^{\beta_{in}} = 1, \quad i = 1, \dots, \ell, \\ & x > 0, \end{aligned}$$

kde $c_j, a_{ij}, b_i > 0$.

V tomto tvaru se nejedná o konvexní úlohu, například

$$\min\ x^{1/2}\ \text{ za podm. }\ xy = 1,\ x, y > 0$$

nemá konvexní ani účelovou funkci ani množinu přípustných řešení.

Nicméně, úlohu můžeme převést na konvexní následující transformací. Uvažujme substituci $y_i \coloneqq \log(x_i)$, $\varphi_j \coloneqq \log(c_j)$, $\xi_{ij} \coloneqq \log(a_{ij})$, $\eta_i \coloneqq \log(b_i)$. Pak

$$\begin{aligned} c_j x_1^{\gamma_{j1}} \dots x_n^{\gamma_{jn}} &= e^{\varphi_j} e^{\gamma_{j1} y_1} \dots e^{\gamma_{jn} y_n} = e^{\gamma_j^T y + \varphi_j} \\ a_{ij} x_1^{\alpha_{i_j 1}} \dots x_n^{\alpha_{i_j n}} &= e^{\xi_{ij}} e^{\alpha_{i_j 1} y_1} \dots e^{\alpha_{i_j n} y_n} = e^{\alpha_{ij}^T y + \xi_{ij}}, \quad \text{kde } \alpha_{ij} = (\alpha_{i_j 1}, \dots, \alpha_{i_j n}), \\ b_i x_1^{\beta_{i1}} \dots x_n^{\beta_{in}} &= e^{\beta_i^T y + \eta_i} \end{aligned}$$

a úlohu lze formulovat jako

$$\begin{aligned} \min\ & \sum_{j=1}^{k} e^{\gamma_j^T y + \varphi_j} \\ \text{za podm.}\ & \sum_{j=1}^{k_j} e^{\alpha_{ij}^T y + \xi_{ij}} \le 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ & e^{\beta_i^T y + \eta_i} = 1, \quad i = 1, \dots, \ell, \\ & y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Zlogaritmováním dostaneme úlohu

$$\begin{aligned} \min\ & \log(\textstyle\sum_{j=1}^{k} e^{\gamma_j^T y + \varphi_j}) \\ \text{za podm.}\ & \log(\textstyle\sum_{j=1}^{k_j} e^{\alpha_{ij}^T y + \xi_{ij}}) \le 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \beta_i^T y + \eta_i = 0, \quad i = 1, \dots, \ell, \\ & y \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

kterážto je konvexní.

Geometrické programování se objevuje například v inženýrských úlohách ze strukturální mechaniky – jak optimalizovat parametry nosníku při omezeních na průhyby atp. Další aplikace a vlastnosti jsou uvedeny například v Boyd and Vandenberghe [2004]; Boyd et al. [2007]. Úloha geometrického programování je efektivně řešitelná v polynomiálním čase pomocí metod vnitřního bodu [Nesterov and Nemirovskii, 1994].

2.3 Semidefinitní programování

Zavedeme relaci $A \preceq B$ mezi symetrickými maticemi $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, která znamená, že $B - A$ je positivně semidefinitní.

Úlohou *semidefinitního programování* je úloha

$$\min\ c^T x \ \text{ za podm. } \ A_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i A_i \preceq 0,\ Ax = b,$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ a matice $A_0, A_1 \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou symetrické.

Jedná se o další způsob zobecnění lineárního programování, které dostaneme jako speciální případ když $A_0 = 0$, $A_i = -e_i e_i^T$, $i = 1, \ldots, n$.

Příklad 2.4. Uvažujme opět problém výběru portfolia (příklad 2.2)

$$\max\ c^T x \ \text{ za podm. } \ e^T x = K,\ x \geq 0,$$

kde c je náhodný vektor se střední hodnotou $\tilde{c} := \mathrm{E}\, c$ a kovarianční maticí $\Sigma := \operatorname{cov} c = \mathrm{E}\,(c - \tilde{c})(c - \tilde{c})^T$. Předpokládejme, že portfolio $\tilde{x}$ je již vybráno, ale pro kovarianční matici máme jen intervalový odhad $\Sigma_1 \leq \Sigma \leq \Sigma_2$. Jaké je riziko portfolia $\tilde{x}$? To je dáno rozptylem výnosu $c^T \tilde{x}$, jenž je roven $\tilde{x}^T \Sigma \tilde{x}$. Tudíž největší rozptyl spočítáme semidefinitním programem

$$\max\ \tilde{x}^T \Sigma \tilde{x} \ \text{ za podm. } \ \Sigma_1 \leq \Sigma \leq \Sigma_2,\ \Sigma \succeq 0. \qquad \square$$

Úloha semidefinitního programování je také efektivně řešitelná v polynomiálním čase pomocí metod vnitřního bodu [Nesterov and Nemirovskii, 1994].

Kapitola 3

Zobecněné konvexní funkce

Zobecněními konvexních funkcí pojednává například Bazaraa et al. [2006]; Avriel et al. [1988]

3.1 Kvazikonvexní funkce

Základní myšlenka této (a následující) sekce spočívá v tom, zobecnit pojem konvexní funkce tak, aby ty pěkné vlastnosti z hlediska optimalizace zůstaly zachovány – jedná se hlavně o tu z věty 3.15.

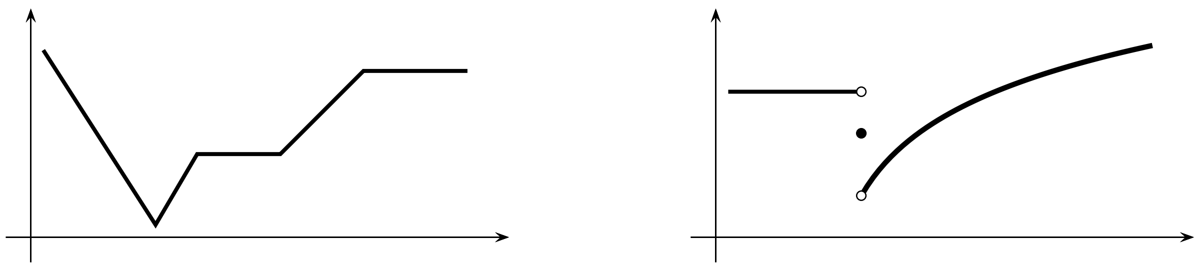
Definice 3.1. Buď $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní. Funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je *kvazikonvexní* pokud pro každé $x_1, x_2 \in M$ a každé $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, platí

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

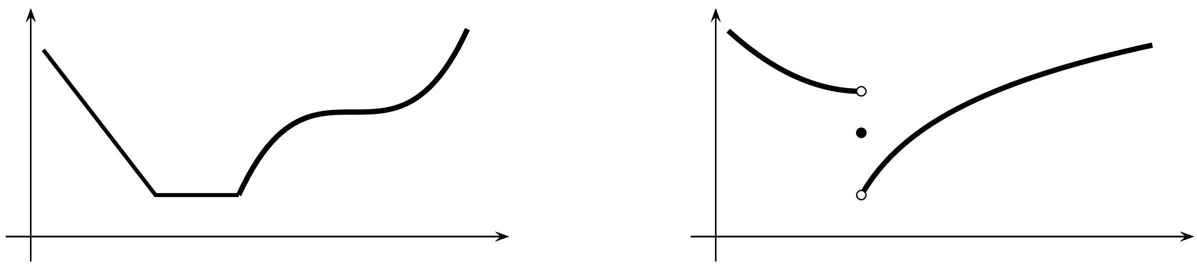
Funkce : $M \to \mathbb{R}$ je *explicitně kvazikonvexní*[1)] pokud je kvazikonvexní a pro každé $x_1, x_2 \in M$, $f(x_1) \neq f(x_2)$, a každé $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, platí

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

Příklady kvazikonvexních funkcí (ne explicitně kvazikonvexních):

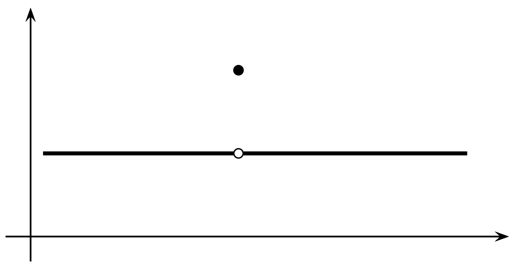


Příklady explicitně kvazikonvexních funkcí:



Proč v definici explicitní kvazikonvexity požadujeme kvazikonvexitu? Jinak by explicitně kvazikonvexní funkce nemusela být kvazikonvexní, např.

[1)]Existuje celá řada dalších variant kvazikonvexity. Často se uvádí striktní kvazikonvexita, existuje i semi-striktní kvazikonvexita a další, v literatuře bývá v názvech občas zmatek. Pojem explicitní kvazikonvexita zavedl Martos (1975).



Analogicky definujeme *(explicitně) kvazikonkávní* funkci jako takovou funkci $f(x)$, pro kterou je $-f(x)$ (explicitně) kvazikonvexní. Dále, $f(x)$ je *kvazilineární* pokud je kvazikonvexní i kvazikonkávní.

Příklad 3.2. Kvazikonkávní je například hustota normálního rozdělení a mnoha jiných rozdělení. Fuzzy čísla mívají také často tvar kvazikonkávní funkce. Kvazilineární jsou například funkce $\log(x)$, $\lceil x \rceil$, distribuční funkce normálního rozdělení., ... $\square$

Nejprve ukažme, že kvazikonvexita skutečně zobecňuje konvexitu.

Věta 3.3. *Buď $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní. Pak máme řetízek implikací pro funkci $f\colon M \to \mathbb{R}$:*

$$\textit{ryze konvexní} \;\Rightarrow\; \textit{konvexní} \;\Rightarrow\; \textit{explicitně kvazikonvexní} \;\Rightarrow\; \textit{kvazikonvexní.}$$

Důkaz. První a poslední implikace jsou triviální, tak uvažme prostřední. Buď $x_1, x_2 \in M$ a definujme $z := \max\{f(x_1), f(x_2)\}$. Pak pro pro konvexní kombinaci $x := \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in M$ máme

$$f(x) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \leq \lambda_1 z + \lambda_2 z = z,$$

což ukazuje kvazikonvexitu. Je-li navíc $f(x_1) \neq f(x_2)$ a $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, tak

$$f(x) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) < \lambda_1 z + \lambda_2 z = z.$$

$\square$

Podobně jako konvexní funkce i kvazikonvexní můžeme ekvivalentně charakterizovat pomocí určité vlastnosti jejich grafu.

Věta 3.4 (Fenchel, 1951)**.** *Buď $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní. Funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je kvazikonvexní právě tehdy, když pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je tzv.* sublevel set $L_\alpha = \{x \in M;\ f(x) \leq \alpha\}$ *konvexní množina.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Buď $f(x)$ kvazikonvexní a $\alpha \in \mathbb{R}$. Mějme $x_1, x_2 \in L_\alpha$, tj. $f(x_1) \leq \alpha$, $f(x_2) \leq \alpha$. Pro konvexní kombinaci bodů x_1, x_2 máme $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\} \leq \alpha$, tedy i ona leží v L_α.

„$\Leftarrow$“ Buď $x_1, x_2 \in M$ a definujme $\alpha := \max\{f(x_1), f(x_2)\}$. Pak $x_1, x_2 \in L_\alpha$ a z předpokladu musí i pro konvexní kombinaci platit $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in L_\alpha$, tj. $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \alpha = \max\{f(x_1), f(x_2)\}$. $\square$

Důsledek 3.5. *Buď $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$. Je-li funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je kvazilineární na M, pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je tzv.* level set $\{x \in M;\ f(x) = \alpha\}$ *konvexní množina.*

V předchozím tvrzení platí i opačná implikace, ale potřebujeme předpoklad, že funkce $f(x)$ je spojitá.

Příklad 3.6. Funkce $f(x) = \frac{a^T x + b}{c^T x + d}$ na množině $\{x \in \mathbb{R}^n;\ c^T x + d > 0\}$ je kvazilineární. Ukážeme, že je kvazikonvexní; kvazikonkavita se nahlédne analogicky. Použijeme větu 3.4. Sublevel set má popis

$$L_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n;\ a^T x + b \leq \alpha(c^T x + d),\ c^T x + d > 0\},$$

což je konvexní množina pro libovolné pevné $\alpha \in \mathbb{R}$. $\square$

Charakterizace kvazikonvexity prvního řádu uvedená dole má pěknou geometrickou představu: derivace v bodě x_1 ve směru k bodu x_2 nesmí být kladná (tedy funkce tím směrem nesmí lokálně růst), pokud je bod x_2 pod bodem x_1 (ve smyslu $f(x_1) \geq f(x_2)$).

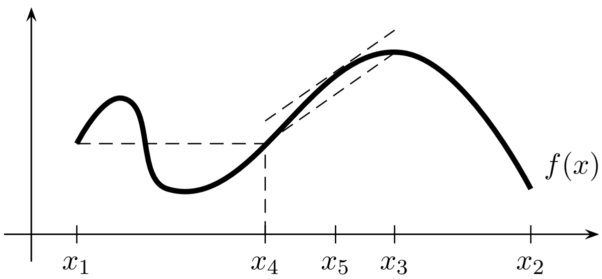
Věta 3.7 (Charakterizace kvazikonvexity funkce prvního řádu)**.** *Buď $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní množina a buď $f(x)$ diferencovatelná funkce na otevřené množině obsahující M. Pak $f(x)$ je kvazikonvexní na M právě tehdy, když pro každé $x_1, x_2 \in M$ platí*

$$f(x_1) \geq f(x_2) \;\Rightarrow\; \nabla f(x_1)^T(x_2 - x_1) \leq 0. \tag{3.1}$$

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Buď $x_1, x_2 \in M$, $f(x_1) \geq f(x_2)$. Pro $\lambda > 0$ dost malé je $x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$ konvexní kombinací bodů x_1, x_2. Podle definice směrové derivace a z kvazikonvexity

$$\nabla f(x_1)^T(x_2 - x_1) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)) - f(x_1)}{\lambda} \leq 0.$$

„$\Leftarrow$“ Sporem předpokládejme, že existují $x_1, x_2 \in M$, $f(x_1) \geq f(x_2)$ a bod $x_3 \in u(x_1, x_2)$ na úsečce mezi x_1 a x_2 takový, že $f(x_3) > f(x_1)$.



Definujme

$$\begin{aligned} \lambda^* &:= \max\{\lambda \in [0,1];\; f(x_1 + \lambda(x_3 - x_1)) = f(x_1)\}, \\ x_4 &:= x_1 + \lambda^*(x_3 - x_1). \end{aligned}$$

Protože $f(x)$ je diferencovatelná, je i spojitá, a tudíž je bod x_4 dobře definovaný. Nyní podle věty o střední hodnotě existuje $x_5 \in u(x_4, x_3)$ takový, že $\nabla f(x_5)^T(x_3 - x_4) = f(x_3) - f(x_4) > 0$. To je spor, neboť $f(x_5) > f(x_4) \geq f(x_2)$, ale $\nabla f(x_5)^T(x_3 - x_4) = \alpha \nabla f(x_5)^T(x_2 - x_5) > 0$, $\alpha > 0$. □

Charakterizace druhého řádu také existují, ale uvádět je nebudeme. Jsou trochu složitější a vesměs ve formě postačující nebo nutné podmínky. Zhruba řečeno, Hessián kvazikonvexní funkce musí být positivně semidefinitní na nadrovině s normálou $\nabla f(x)$. Hessián má tedy vždy maximálně jedno záporné vlastní číslo.

3.2 Chain rules pro kvazikonvexitu

Kvazikonvexní funkce jsou uzavřené na nezáporné násobky, ale na součet (narozdíl od konvexity) už obecně ne. Například pro funkce $\log(x)$, $\log(10 - x)$ na intervalu $M = [1, 9]$.

Věta 3.8. *Je-li $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní množina a jsou-li $f_1, \ldots, f_k \colon M \to \mathbb{R}$ kvazikonvexní funkce, pak $\max_{i=1,\ldots,k} f_i(x)$ je také kvazikonvexní funkce.*

Důkaz. Pro konvexní kombinaci bodů $x_1, x_2 \in M$ máme

$$\max_{i=1,\ldots,k} f_i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \max_{i=1,\ldots,k} \max\{f_i(x_1), f_i(x_2)\} = \max\left\{ \max_{i=1,\ldots,k} f_i(x_1),\; \max_{i=1,\ldots,k} f_i(x_2) \right\}. \qquad \square$$

Věta 3.9. *Je-li $f(x) \leq 0$ konvexní, $g(x) \geq 0$ konkávní, pak $f(x) \cdot g(x)$ je explicitně kvazikonvexní.*

Důkaz. Buď $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ a bez újmy na obecnost nechť $f(x_1) \geq f(x_2)$. Označme

$$\alpha := \max\{f(x_1)g(x_1), f(x_2)g(x_2)\}.$$

Pokud $g(x_1) \leq g(x_2)$, pak pro konvexní kombinaci platí:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq f(x_1) g(x_1) \leq \alpha.$$

Nyní předpokládejme $g(x_1) \geq g(x_2)$. Pomocné pozorování:

$$\begin{aligned} f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2) - f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_1) &= f(x_1)(g(x_1) - g(x_2)) + f(x_2)(g(x_2) - g(x_1)) \\ &= (f(x_1) - f(x_2))(g(x_1) - g(x_2)) \geq 0. \end{aligned}$$

Nyní pro konvexní kombinaci platí

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &\leq (\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2))(\lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2)) \\ &= \lambda_1^2 f(x_1)g(x_1) + \lambda_2^2 f(x_2)g(x_2) + \lambda_1\lambda_2(f(x_1)g(x_2) + f(x_2)g(x_1)) \\ &\leq \lambda_1^2 f(x_1)g(x_1) + \lambda_2^2 f(x_2)g(x_2) + \lambda_1\lambda_2(f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2)) \\ &\leq \alpha(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2) = \alpha. \end{aligned}$$

To dokazuje kvazikonvexitu. Explicitní kvazikonvexita se ukáže analogicky. □

Příklad 3.10.

- Funkce $f(x) = \sqrt{x}\log(x)$ je explicitně kvazikonkávní na $x \in [1, \infty)$.
- Součin dvou nezáporných lineárních funkcí je explicitně kvazikonkávní (ale nemusí být konkávní, čili věta 3.9 nelze zesílit v tomto směru). □

Věta 3.11. *Je-li $f(x) \geq 0$ konvexní a $g(x) > 0$ konkávní, pak $\frac{f(x)}{g(x)}$ je kvazikonvexní.*

Důkaz. Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ má sublevel set tvar

$$L_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \leq \alpha g(x)\} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) - \alpha g(x) \leq 0\}.$$

Pro $\alpha < 0$ je $L_\alpha = \emptyset$. Pro $\alpha \geq 0$ je to konvexní množina protože $f(x) - \alpha g(x)$ je konvexní funkce. □

Příklad 3.12.

- Funkce $e^x/(1+x)$ je kvazikonvexní pro $x > -1$.
- Funkce $\|Ax - b\|/(c^T x)$ je kvazikonvexní pro $c^T x > 0$ a libovolnou normu. □

Věta 3.13 (Fenchel, 1951)**.** *Je-li $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neklesající a $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvazikonvexní, pak $f(g(x))$ je kvazikonvexní.*

Důkaz. Z definice pro konvexní kombinaci bodů x_1, x_2 máme

$$f(g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)) \leq f(\max\{g(x_1), g(x_2)\}) = \max\{f(g(x_1)), f(g(x_2))\}.$$ □

Příklad 3.14. Tedy i funkce $1/f(x)$ je kvazikonkávní pokud $f(x) > 0$ je kvazikonvexní. Tudíž je kvazikonkávní například $1/(1+x^2)$. □

3.3 Kvazikonvexní optimalizace

Uvažujme úlohu $\min_{x \in M} f(x)$, kde $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je kvazikonvexní funkce.

Jak bylo již avizováno, z pohledu optimalizace mají kvazikonvexní funkce stále pěkné vlastnosti.

Věta 3.15. *Buď $f(x)$ explicitně kvazikonvexní. Pak každé lokální minimum je globálním.*

Důkaz. Buď $x^0 \in M$ lokální minimum a pro spor nechť existuje $x^* \in M$ takové, že $f(x^*) < f(x^0)$. Uvažujme konvexní kombinaci $x = \lambda x^* + (1-\lambda)x^0 \in M$, $\lambda \in (0,1)$. Pak

$$f(x) < \max\{f(x^*), f(x^0)\} = f(x^0).$$

To je spor s lokální minimalitou x^0 neboť pro libovolně malé $\lambda > 0$ je $f(x) < f(x^0)$. □

Poznámka 3.16. Věta platí i pro kvazikonvexní funkce pokud lokální minimum je striktní. V opačném případě už věta platit nemusí, což se snadno nahlédne protipříkladem ze strany 13.

Věta 3.17. *Množina optimálních řešení úlohy* $\min_{x\in M} f(x)$ *je konvexní.*

Důkaz. Buď z optimální hodnota. Pak množina optimálních řešení má tvar $\{x \in M;\ f(x) \leq z\}$, což je podle věty 3.4 konvexní množina. □

Podmínky optimality jsou následující, bohužel jenom postačující forma.

Věta 3.18. *Buď* $f(x)$ *diferencovatelná, explicitně kvazikonvexní funkce na konvexní množině* $M \subseteq \mathbb{R}^n$. *Pak* $x^* \in M$ *je optimálním řešením pokud pro každé* $y \in M \setminus \{x^*\}$ *platí* $\nabla f(x^*)^T(y - x^*) > 0$.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje $y \in M$ takové, že $f(y) < f(x^*)$. Podle věty 3.7 pak $\nabla f(x^*)^T(y - x^*) \leq 0$, spor. □

Tato podmínka optimality je užitečná pokud je x^* krajní bod množiny M, ale není moc praktická pro charakterizaci optimálních řešení uvnitř množiny M. Například úloha $\min_{x\in\mathbb{R}} x^2$ má minimum v nule, ale podmínka nahoře pro něj neuspěje.

3.4 Zobecněné lineární frakcionální programování

Lineární frakcionální programování. Nejprve připomeneme standardní úlohu lineárního frakcionálního programování

$$\min \frac{a^T x + b}{c^T x + d} \ \text{ za podm. } \ Ax \leq g.$$

Předpokládáme, že $c^T x + d > 0$ pro všechna přípustná řešení.

Tato úloha zdánlivě zobecňuje třídu úloh lineárního programování, nicméně ji můžeme na lineární progam přepsat tzv. Charnesovou–Cooperovou transformací [Charnes and Cooper, 1962]. Zavedeme substituci proměnných $y := \frac{x}{c^T x+d}$, $z := \frac{1}{c^T x+d}$ a úloha dostane tvar

$$\min \ a^T y + bz \ \text{ za podm. } \ Ay - gz \leq 0,\ z > 0.$$

Transformace je ekvivalentní, neboť přípustné řešení (y, z) převedeme zpět přepisem $x = y(c^T x+d) = y/z$.

Prakticky se pak úloha nahradí lineárním programem

$$\min \ a^T y + bz \ \text{ za podm. } \ Ay - gz \leq 0,\ z \geq 0.$$

Pokud výsledné optimální řešení (y^*, z^*) má druhou složku nulovou ($z^* = 0$), otestujeme, zda existuje optimální řešení s nenulovým z. Pokud takové neexistuje, pak původní úloha nenabývá optima.

Pro ilustraci uvažujme jednoduchou úlohu

$$\min \ x \ \text{ za podm. } \ x \geq 1.$$

Optimální řešení neexistuje, hodnota účelové funkce se blíží limitně k 0. Úloha se transformuje na lineární program

$$\min \ y \ \text{ za podm. } \ y - z \geq 0,\ z \geq 0.$$

Jediné optimální řešení je $(y^*, z^*) = (0, 0)$.

Zobecněné lineární frakcionální programování. Úloha *zobecněného lineárního frakcionálního programování* je

$$\min_{x\in M}\ \max_{i=1,\dots,k}\ \frac{a_i^T x + b_i}{c_i^T x + d_i},$$

kde $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina s vlastností, že pro každé $x \in M$ a $i = 1,\dots,k$ je $c_i^T x + d_i > 0$.

Podle příkladu 3.6 jsou funkce $\frac{a_i^T x+b_i}{c_i^T x+d_i}$ kvazikonvexní a podle věty 3.8 je jejich maximum také kvazikonvexní. Tudíž se jedná o třídu úloh kvazikonvexní optimalizace. Jak jsme viděli v předchozí sekci, v případě $k = 1$ se dá úloha přepsat na lineární program, pro obecné k se to ale neumí. Nicméně stále se dá tato úloha řešit efektivně [Freund and Jarre, 1995; Nesterov and Nemirovskii, 1995].

Ukážeme aplikaci tohoto modelu v ekonomice.

Příklad 3.19 (Von Neumannův model růstu v ekonomice, 1937)**.** Uvažujme ekonomiku s n výrobními procesy a m druhy zboží. Proces je transformace měnící vektor zboží $(a_{1j},\dots,a_{mj})^T$ na jiný vektor zboží $(b_{1j},\dots,b_{mj})^T$ za jednotku času, typicky rok. Proměnná x_j udává aktivitu či intenzitu j-tého procesu. Procesem může být například pekař, měnící mouku, energii a oběd na chléb a odpad (třeba i teplo). Intenzita pak odpovídá počtu zaměstnaných pekařů, pro jednoduchost se ale uvažuje jako spojitá proměnná.

Maticově zapsáno, vektory $x, y > 0$ udávají intenzitu jednotlivých procesů v letošním a příštím roce. Technologické koeficienty jsou dány ve známých nezáporných maticích $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, čili se vyprodukuje Bx množství jednotlivého zboží a spotřebuje Ax zboží. Přirozená podmínka je, aby množství spotřebovaného zboží v dalším roce nepřekročilo množství vyprodukovaného zboží v letošním roce, tedy $Ay \le Bx$. Bereme-li vektory x, y jako proměnné, dostáváme podmínky

$$Ay \le Bx,\ \ x, y > 0.$$

Vektor x můžeme normovat tak, aby $x \ge 1$ a podmínku $y > 0$ pak můžeme prakticky (ne teoreticky) nahradit podmínkou $y \ge 0$. Růst v sektoru i je dán podílem y_i/x_i a pokud bereme nejhorší případ, dostaneme účelovou funkci $\min_{i=1,\dots,n} \frac{y_i}{x_i}$, kterou chceme maximalizovat. Výsledný model je pak

$$\max\ \min_{i=1,\dots,n} \frac{y_i}{x_i}\ \text{ za podm. }\ Ay \le Bx,\ x \ge 1,\ y \ge 0. \tag{3.2}$$

Optimální hodnota udává míru růstu ekonomiky. Jinak můžeme model formulovat jako

$$\max\ \alpha\ \text{ za podm. }\ \alpha Ax \le Bx,\ x \ge 1,\ \alpha \ge 0.$$

Problém (3.2) je úlohou zobecněného lineárního frakcionálního programování; ekvivalentní vyjádření v základním tvaru je

$$-\min\ \max_{i=1,\dots,n} -\frac{y_i}{x_i}\ \text{ za podm. }\ Ay \le Bx,\ x \ge 1,\ y \ge 0.$$ □

Jiným příkladem tohoto typu úlohy je problém přidělení síly vysílačů:

`http://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/ee236a/lectures/lfp.pdf`

3.5 Pseudokonvexní funkce

Pseudokonvexita (Mangasarian, 1965, Tuy, 1964) představuje další používané zobecnění konvexních funkcí. Uvažovaná funkce musí být ale diferencovatelná. Existuje ještě celá další řada zobecnění, ale těmi už se zabývat nebudeme.

Definice 3.20. Buď $\emptyset \ne M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní. Funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je *pseudokonvexní* pokud pro každé $x_1, x_2 \in M$ platí

$$\nabla f(x_1)^T (x_2 - x_1) \ge 0 \quad\Rightarrow\quad f(x_2) \ge f(x_1).$$

Jinými slovy, pokud je derivace v bodě x_1 nerostoucí v nějakém směru, pak v tomto směru jsou všechny funkční hodnoty nad nebo na úrovni $f(x_1)$. Pro porovnání s charakterizací kvazikonvexity v (3.1) je možná názornější obměněná implikace

$$f(x_1) > f(x_2) \;\Rightarrow\; \nabla f(x_1)^T(x_2 - x_1) < 0.$$

Věta 3.21. *Platí následující řetízek pro funkci $f(x)$*

$$\textit{konvexní} \;\Rightarrow\; \textit{pseudokonvexní} \;\Rightarrow\; \textit{kvazikonvexní.}$$

Důkaz. První implikace plyne z charakterizace konvexity prvního řádu (1.1), tj. $f(x_2)-f(x_1) \geq \nabla f(x_1)^T(x_2-x_1)$. Pokud je pravá strana nerovnosti nezáporná, tak musí být i levá strana nezáporná.

Druhou implikaci dokážeme sporem. Nechť $f(x)$ je pseudokonvexní, ale není kvazikonvexní. Pak existují body x, y takové, že

$$\nabla f(x)^T(y - x) \geq 0 \;\Rightarrow\; f(y) \geq f(x),$$
$$\nabla f(x)^T(y - x) > 0 \;\wedge\; f(y) \leq f(x).$$

Souhrnem, $\nabla f(x)^T(y - x) > 0$ a zároveň $f(x) = f(y)$. Z první podmínky plyne, že funkce je rostoucí od x směrem k y, tedy existuje bod z na jejich úsečce (dost blízko x) takový, že $f(z) > f(x)$. Podle Rolleovy věty funkce na úsečce nabývá svého maxima z^*, které je nutně uvnitř úsečky a splňuje $f(z^*) \geq f(z) > f(x) = f(y)$. Pro tento bod tedy platí $\nabla f(z^*)^T(y - z^*) = 0$, což z pseudokonvexity dává $f(y) \geq f(z^*)$, spor. □

Všechny vlastnosti kvazikonvexních funkcí tedy platí i pro pseudokonvexní. Pro optimalizaci s pseudokonvexní účelovou funkcí jsou důležité následující dvě vlastnosti, které kvazikonvexní ani explicitně kvazikonvexní funkce obecně nemají (najděte protipříklady!).

Věta 3.22 (Mangasarian, 1965)**.** *Buď $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní a buď $f\colon M \to \mathbb{R}$ pseudokonvexní. Je-li $\nabla f(x) = 0$ pro nějaké $x \in M$, pak x je globálním minimem funkce $f(x)$ na množině M.*

Důkaz. Z definice $\nabla f(x) = 0$ implikuje $f(x_2) \geq f(x)$ pro všechna $x_2 \in M$. □

Ta druhá je zobecněním věty 1.2.

Věta 3.23. *Buď $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní a $f\colon M' \to \mathbb{R}$ pseudokonvexní a diferencovatelná na otevřené $M' \supseteq M$. Pak $x^* \in M$ je optimální řešení právě tehdy, když pro každé $y \in M$ je $\nabla f(x^*)^T(y - x^*) \geq 0$.*

Důkaz. „⇒“ Pro spor předpokládejme, že existuje $y \in M$ takové, že $\nabla f(x^*)^T(y - x^*) < 0$. Uvažujme konvexní kombinaci $x = \lambda y + (1 - \lambda)x^* = x^* + \lambda(y - x^*) \in M$. Pak

$$0 > \nabla f(x^*)^T(y - x^*) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x^* + \lambda(y - x^*)) - f(x^*)}{\lambda}.$$

Tudíž pro dost malé $\lambda > 0$ je $f(x) < f(x^*)$, spor.

„⇐“ Z definice pseudokonvexity pro každé $y \in M$ vztah $\nabla f(x^*)^T(y - x^*) \geq 0$ implikuje $f(y) \geq f(x^*)$, a proto je x^* optimálním řešením. □

Následuje charakterizace druhého řádu, která říká, že Hessián pseudokonvexní funkce musí mít maximálně jedno záporné vlastní číslo a navíc odpovídající vlastní vektor musí být v určité shodě s gradientem.

Věta 3.24 (Mereau & Paquet, 1974)**.** *Buď $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní. Funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je pseudokonvexní pokud existuje $\alpha \geq 0$ takové, že $\nabla^2 f(x) + \alpha \nabla f(x) \nabla f(x)^T$ je positivně semidefinitní pro každé $x \in M$.*

Důkaz. Pro $\alpha = 0$ je $f(x)$ konvexní, tudíž předpokládejme $\alpha > 0$. Uvažme funkci $g = e^{\alpha f(x)}$. Pak

$$\nabla g(x) = \alpha e^{\alpha f(x)} \nabla f(x),$$
$$\nabla^2 g(x) = \alpha e^{\alpha f(x)} (\nabla^2 f(x) + \alpha \nabla f(x) \nabla f(x)^T).$$

Funkce $g(x)$ je tedy konvexní a tím i pseudokonvexní. Pokud $\nabla f(x_1)^T(x_2 - x_1) \geq 0$, pak $\nabla g(x_1)^T(x_2 - x_1) \geq 0$. Z pseudokonvexity je $g(x_2) \geq g(x_1)$, a z monotonie exponenciály je $f(x_2) \geq f(x_1)$. □

Kapitola 4

Podmínky optimality

V této kapitole uvažujeme úlohou optimalizace

$$\min \ f(x) \ \text{ za podm. } \ x \in M$$

kde $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce a

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n;\, g_j(x) \leq 0,\ j = 1, \ldots, J\},$$

kde $g_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, J$, jsou také spojitě diferencovatelné.

Naším cílem je (aspoň částečně) charakterizovat situaci, kdy je daný bod $x^* \in M$ optimálním řešením. To je obecně velmi těžké, takže prozkoumáme i podmínky, kdy x^* je pouze lokálním extrémem. Pokud x^* leží ve vnitřku množiny M, pak $\nabla f(x) = 0$ je nutná podmínka pro to, aby x^* byl lokální extrém. Nutnou podmínkou pro lokální minimum je positivní semidefinitnost Hessiánu $\nabla^2 f(x^*)$. Naopak, pokud $\nabla f(x) = 0$ a Hessián $\nabla^2 f(x^*)$ je positivně definitní, pak x^* je ostré lokální minimum.

Pokud se lokální extrém x^* nachází na hranici množiny M, je situace složitější. Podmínky optimality, diskutované v této kapitole, se zabývají právě touto obecnější situací. Pokud je bod na hranici množiny M popsané nerovnostmi, pak některé nerovnosti se nabývají jako rovnosti. Právě tato omezení, nazývané aktivní podmínky, hrají zásadní roli při charakterizaci, kdy je x^* extrémem.

Definice 4.1. *Množina aktivních podmínek* daného vektoru $x \in M$ je $I(x) := \{i = 1, \ldots, J;\, g_j(x) = 0\}$.

4.1 Podmínky Fritze Johna

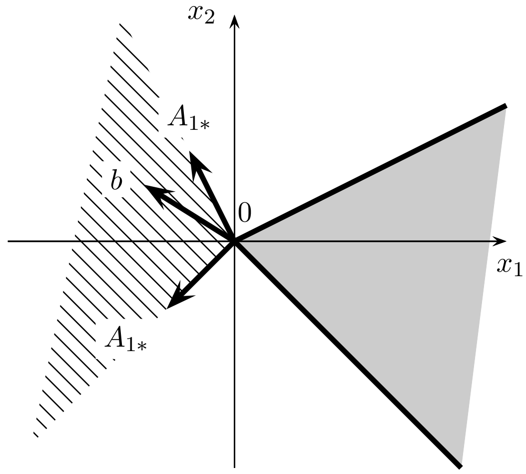
Připomeňme nejprve slavné Farkasovo lemma, a to jednu z mnoha ekvivalentních verzí, viz např. Fiedler et al. [2006].

Lemma 4.2 (Farkas, 1902)**.** *Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Pak právě jedna soustava má řešení:*

(1) $Ax \leq 0$, $b^T x > 0$,

(2) $A^T y = b$, $y \geq 0$.

Farkasovo lemma má pěknou geometrickou interpretaci: maximum lineární funkce $b^T y$ na konvexním polyedrickém kuželi $Ay \leq 0$ se nabyde v počátku (oproti druhé možnosti, že účelová funkce je shora neomezená, tedy první soustava má řešení) právě tehdy, když vektor b leží v konvexním polyedrickém kuželi s hranami $A_{1*}, \ldots, A_{m*}$.



Podobné tvrzení je Gordanova věta.

Věta 4.3 (Gordan, 1873)**.** *Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Pak právě jedna soustava má řešení:*

(1) $Ax < 0$,

(2) $A^T y = 0,\ y \geq 0,\ y \neq 0$.

Důkaz. Soustava $Ax < 0$ je řešitelná právě tehdy, když je řešitelná $Ax + \delta e \leq 0$, $\delta > 0$. To je podle Farkasova lemmatu ekvivalentní s neřešitelností $A^T y = 0$, $e^T y = 1$, $y \geq 0$, což je soustava z věty s normalizovaným vektorem y. □

Abychom mohli odvodit podmínky optimality, potřebujeme nejdříve pomocné tvrzení.

Lemma 4.4. *Buď $x^* \in M$ lokální minimum. Pak neexistuje $d \in \mathbb{R}^n$ takové, aby $\nabla f(x^*)^T d < 0$ a $\nabla g_j(x^*)^T d < 0$ pro všechna $j \in I(x^*)$.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že takový vektor d existuje. Z vlastnosti

$$0 > \nabla f(x^*)^T d = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{f(x^* + \alpha d) - f(x^*)}{\alpha}$$

dostáváme, že existuje $\varepsilon_1 > 0$ takové, že pro všechna $\alpha \in (0, \varepsilon_1)$ je $f(x^* + \alpha d) < f(x^*)$. Z vlastnosti

$$0 > \nabla g_j(x^*)^T d = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{g_j(x^* + \alpha d) - g_j(x^*)}{\alpha}$$

dostáváme, že existuje $\varepsilon_2 > 0$ takové, že pro všechna $j \in I(x^*)$ a $\alpha \in (0, \varepsilon_2)$ je $g_j(x^* + \alpha d) < g_j(x^*) = 0$. Ze spojitosti pak existuje $\varepsilon_3 > 0$ takové, že pro všechna $j \notin I(x^*)$ a $\alpha \in (0, \varepsilon_3)$ je $g_j(x^* + \alpha d) < 0$. Souhrnně, pro všechna $\alpha \in (0, \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\})$ je $x^* + \alpha d \in M$ a ostře lepší než x^*. To je spor s lokální minimalitou x^*. □

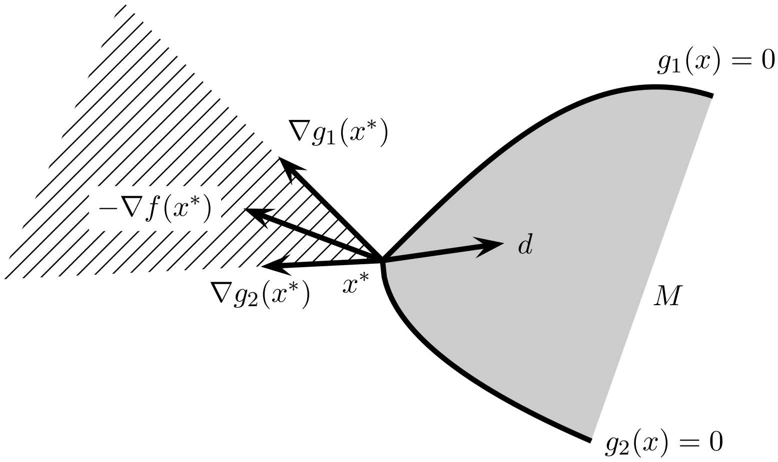
Lemma tvrdí očekávatelnou vlastnost, že neexistuje směr dovnitř množiny přípustných řešení, ve kterém by účelová funkce ostře klesala, viz obrázek 4.1. Ostré nerovnosti ve formulaci lemmatu jsou esenciální. Tu první nahradit neostrou $\nabla f(x^*)^T d \leq 0$ nelze, protože by lemma přestalo platit třeba pro funkci $f(x) = 0$. Podobně nelze nadradit zbylé nerovnosti neostrými $\nabla g_j(x^*)^T d \leq 0$, viz obrázek 4.2. Nyní již máme připravenou půdu k formulaci podmínek Fritze Johna.

Věta 4.5 (Fritz John, 1948, nutné podmínky optimality)**.** *Buď $x^* \in M$ lokální minimum. Pak existuje $\mu \in \mathbb{R}$ a $\lambda \in \mathbb{R}^J$ takové, že*

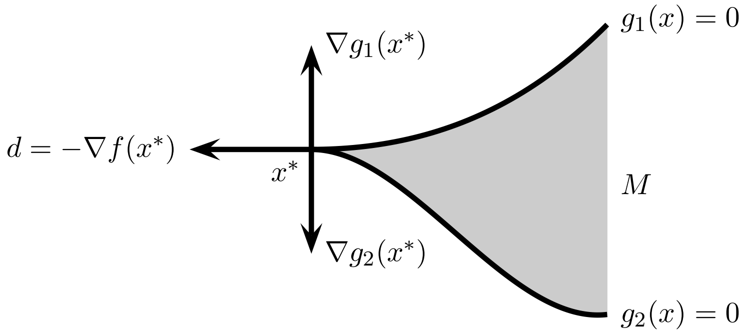
$$\mu \geq 0,\ \ \lambda \geq 0,\ \ (\mu, \lambda) \neq 0, \tag{4.1a}$$

$$\nabla f(x^*)\mu + \nabla g(x^*)\lambda = 0, \tag{4.1b}$$

$$g(x^*)^T \lambda = 0. \tag{4.1c}$$



Obrázek 4.1: Množina M a normálový kužel generovaný vektory normál aktivních podmínek $\nabla g_j(x^*)$, $j \in I(x^*)$.



Obrázek 4.2: Normálový kužel generovaný vektory normál aktivních podmínek $\nabla g_j(x^*)$, $j \in I(x^*)$, je pouze svislá přímka.

Důkaz. Podle lemmatu 4.4 je soustava

$$\nabla f(x^*)^T d < 0, \quad \nabla g_j(x^*)^T d < 0, \ j \in I(x^*)$$

neřešitelná. Podle Gordanovy věty 4.3 existují $\mu \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $(\mu, \lambda) \neq 0$ takové, že

$$\mu \nabla f(x^*) + \sum_{j \in I(x^*)} \lambda_j \nabla g_j(x^*) = 0.$$

Nyní stačí jen dodefinovat $\lambda_j := 0$ pro $j \notin I(x^*)$ a jsme hotovi. □

Podmínka (4.1c) z věty se nazývá podmínka komplementarity a jinými slovy říká, že pro každé $j = 1, \dots, J$ je $\lambda_j = 0$ nebo $g_j(x^*) = 0$. Tudíž pro neaktivní podmínky $j \notin I(x^*)$ musí $\lambda_j = 0$.

Pokud $\mu \neq 0$, tak se dá podmínka (4.1b) geometricky interpretovat tak, že směr největšího klesání $-\nabla f(x^*)$ účelové funkce v bodě M je v kuželu generovaném vektory normál $\nabla g_j(x^*)$, $j \in I(x^*)$ (tzv. normálový kužel). Tedy všechny směry klesání vychází ven z množiny M, viz obrázek 4.1. Pokud $\mu = 0$, pak tato geometrická představa selhává, viz obrázek 4.2.

Speciálně, pokud x^* je vnitřní bod, tj. $g(x^*) < 0$, tak musí $\lambda = 0$ a tím pádem dostaneme známou podmínku $\nabla f(x^*) = 0$.

Pro pevný bod x^* tvoří podmínky Fritze Johna lineární systém rovnic a nerovnic, a jde tudíž vyřešit pomocí lineárního programování.

4.2 Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky

Podmínky Fritze Johna jsou obecné bez speciálních předpokladů. To je ale i jejich nevýhoda, protože jsou poměrně slabé. Umožňují například případ $\mu = 0$, tedy účelová funkce se v podmínkách neprojeví. Naším postupným cílem bude tedy podmínky zesílit tak, aby $\mu = 1$. To ovšem nebude zadarmo – daní za silnější podmínky budou dodatečné předpoklady, které se nazývají *kvalifikace omezení.* Výsledné podmínky optimality se nazývají Karush-Kuhn-Tuckerovy (KKT) podmínky[1)]

První kvalifikace omezení, kterou zmíníme, je *lineární nezávislost gradientů.*

Věta 4.6 (KKT podmínky – lineární nezávislost gradientů)**.** *Buď $x^* \in M$ lokální minimum. Nechť vektory $\nabla g_j(x^*)$, $j \in I(x^*)$, jsou lineárně nezávislé. Pak existuje $\lambda \in \mathbb{R}^J$ takové, že*

$$\lambda \geq 0, \tag{4.2a}$$

$$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda = 0, \tag{4.2b}$$

$$g(x^*)^T \lambda = 0. \tag{4.2c}$$

Důkaz. Z podmínek Fritze Johna (věta 4.5) víme, že existuje μ a λ splňující podmínky (4.1). Z lineární nezávislosti gradientů nemůže $\mu = 0$, protože pak by $\nabla g(x^*)^T \lambda = 0$. Znormováním vektoru (μ, λ) dosáhneme $\mu = 1$. □

Druhá kvalifikace omezení, kterou zmíníme, je *Slaterova podmínka.*

Věta 4.7 (KKT podmínky – Slaterova podmínka)**.** *Buď $x^* \in M$ lokální minimum. Nechť funkce $g_j(x)$, $j \in I(x^*)$ jsou konvexní a nechť existuje vektor $x^0 \in M$ takový, že $g(x^0) < 0$. Pak existuje $\lambda \in \mathbb{R}^J$ takové, že platí KKT podmínky (4.2).*

Důkaz. Z konvexity pro každé $j \in I(x^*)$ máme

$$\nabla g_j(x^*)^T (x^0 - x^*) \leq g_j(x^0) - g_j(x^*) < 0 - 0 = 0.$$

Označme $d := x^0 - x^*$, pak $\nabla g_j(x^*)^T d < 0$ pro $j \in I(x^*)$. Podle Gordanovy věty 4.3 neexistuje $\lambda \geq 0$, $\lambda \neq 0$, takové, že $\nabla g(x^*)^T \lambda = 0$. Pokud by tedy soustava (4.1) měla řešení s $\mu = 0$, dostali bychom spor. Tudíž $\mu \neq 0$ a po znormování je $\mu = 1$. □

Příklad 4.8. Poznamenejme, že podmínka $g(x^0) < 0$ je skutečně nutná a pouhá konvexita funkcí nestačí. Například úloha

$$\min\ x_1 \quad \text{za podm.}\ \ x_1^2 \leq x_2,\ x_1^2 \leq -x_2$$

má jediné přípustné řešení $x^* = (0, 0)^T$, které je tím pádem i optimem. KKT podmínky pro tento bod ale splněny nejsou neboť opačný gradient účelové funkce $-\nabla f(x^*) = (-1, 0)^T$ nelze vyjádřit jako nezápornou kombinaci $(0, -1)^T$ a $(0, 1)^T$, gradientů funkcí z omezení. □

Třetí, a poslední, kvalifikace omezení, kterou zmíníme, je *Abadieho podmínka.* Její zformulování je trochu komplikovanější. Zaveďme dva typy kuželů v bodě $x^* \in M$ vůči množině M:

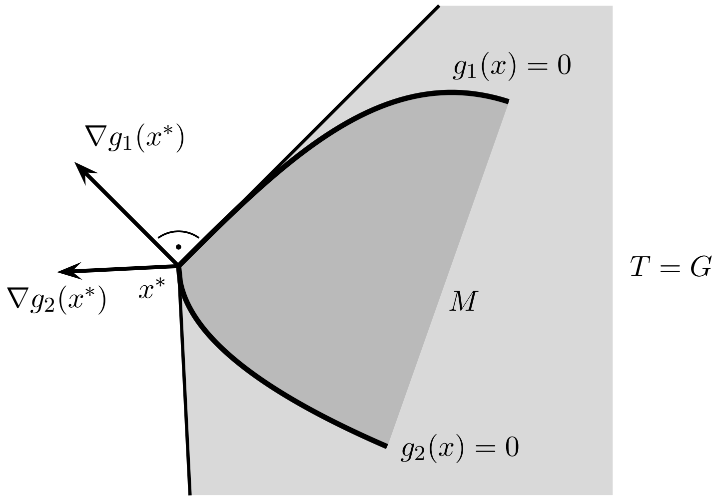
- tečný kužel $T := \{d \in \mathbb{R}^n;\ d = \lim_{k\to\infty} \alpha_k(x_k - x^*),\ \alpha_k > 0,\ x_k \in M,\ x_k \to_{k\to\infty} x^*\}$,
- kužel gradientů $G := \{d \in \mathbb{R}^n;\ \nabla g_j(x^*)^T d \leq 0,\ j \in I(x^*)\}$.

Abadieho podmínka nyní určuje rovnost obou kuželů $T = G$.

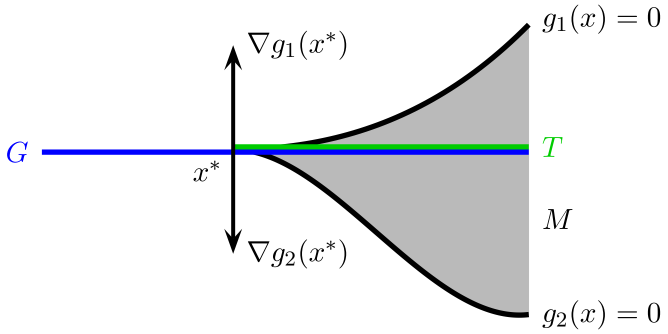
V příkladu na obrázku 4.3 se oba kužele shodují, tedy $T = G$, zatímco v příkladu na obrázku 4.4 je $T \subsetneq G$, protože tečný kužel je nezáporná část osy x_1, ale kužel gradientů je celá osa x_1.

Věta 4.9. *Platí:* $\operatorname{int} G \subseteq \operatorname{int} T \subseteq T \subseteq G$.

[1)] Podmínky zavedli a zpopularizovali Harold W. Kuhn a Albert W. Tucker roku 1951. Nezávisle na nich je (s ne tak silnými výsledky) objevil už dříve roku 1939 William Karush ve své diplomové práci, která se zabývala konečně-dimenzionální úlohou variačního počtu. Poté, co se Kuhn roku 1974 dozvěděl o Karushově práci, tak se zasadil o přidání jeho jména do názvu těchto podmínek.



Obrázek 4.3: Množina M a případ, kdy $T = G$, tedy tečný kužel a kužel gradientů jsou shodné.



Obrázek 4.4: Množina M a případ, kdy $T \subsetneqq G$, tedy tečný kužel je částí kužele gradientů.

Důkaz. Za cvičení. □

Abadieho podmínka je ze všech tří nejobecnější, obě dvě předchozí tuto implikují.

Věta 4.10. *Podmínka lineární nezávislosti i Slaterova podmínka implikují Abadieho podmínku.*

Důkaz. „Lineární nezávislost ⇒ Abadieho podmínka.“ Z předpokladu má Jakobián $\nabla g(x^*)$ tvořený jen aktivními podmínkami plnou sloupcovou hodnost, existuje tedy $d^* \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\nabla g(x^*)^T d^* = -e < 0$. Chceme dokázat $G \subseteq T$, buď tedy $d \in G$. Potom pro každé $\alpha > 0$ je $\nabla g(x^*)^T(d + \alpha d^*) < 0$ a tudíž podle důkazu lemmatu 4.4 je $x_\alpha := x^* + \beta_\alpha(d + \alpha d^*) \in \operatorname{int} M$ pro dost malé $\beta_\alpha > 0$. Limitním přechodem $\alpha \to 0^+$ dostaneme $d \in T$.

„Slaterova podmínka ⇒ Abadieho podmínka.“ Podobně jako v předchozím. Zvolíme tentokrát $d^* := x^0 - x^*$ a z konvexity podle (1.1) máme $\nabla g(x^*)^T d^* \leq g(x^0) - g(x^*) < 0$. □

Lemma 4.4 můžeme zesílit na následující podobu. Formulaci lemmatu 4.4 v důsledku dostaneme, když množinu T nahradíme její nadmnožinou G.

Lemma 4.11. *Buď $x^* \in M$ lokální minimum. Pak neexistuje $d \in \mathbb{R}^n$ takové, aby $\nabla f(x^*)^T d < 0$, $d \in T$.*

Důkaz. Za cvičení. □

Věta 4.12 (KKT podmínky – Abadieho podmínka)**.** *Buď $x^* \in M$ lokální minimum. Nechť $T = G$. Pak existuje $\lambda \in \mathbb{R}^J$ takové, že platí KKT podmínky (4.2).*

Důkaz. Podle lemmatu 4.11 neexistuje $d \in \mathbb{R}^n$ takové, aby $\nabla f(x^*)^T d < 0$, $d \in T = G$. Podle Farkasova lemmatu 4.2 existuje $\lambda \geq 0$, takové, že $\sum_{j \in I(x^*)} \lambda_j \nabla g_j(x^*) = -\nabla f(x^*)$. Dodefinováním $\lambda_j := 0$ pro $j \notin I(x^*)$ dostaneme podmínky komplementarity (4.2c). □

Abadieho podmínka je vždy splněna pro lineární omezení.

Věta 4.13. *Je-li $g(x) = Ax - b$, pak $T = G$.*

Důkaz. Je jednoduché nahlédnout, že oba kužele mají popis $A_{i*}x \leq 0$, $i \in I(x^*)$. □

Závěrem této sekce ukážeme alternativní pohled na KKT podmínky. Můžeme na ně totiž nahlížet jako na podmínky optimality lineárního programu, který vznikne linearizací účelové funkce a funkcí z aktivních omezení v bodě x^*.

Věta 4.14 (KKT podmínky a lineární relaxace)**.** *Buď $x^* \in M$ lokální minimum. Pak x^* splňuje KKT podmínky (4.2) právě tehdy, když je optimálním řešením lineárního programu*

$$\min\ f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(x - x^*) \quad \textit{za podm.} \quad g_j(x^*) + \nabla g_j(x^*)^T(x - x^*) \leq 0,\ j \in I(x^*).$$

Důkaz. Protože na konstantním členu v účelové funkce nezáleží, lineární program přepíšeme na

$$\max\ -\nabla f(x^*)^T x \quad \text{za podm.} \quad \nabla g_j(x^*)^T x \leq \nabla g_j(x^*)^T x^* - g_j(x^*),\ j \in I(x^*).$$

Duální program má tvar

$$\min \sum_{j \in I(x^*)} \lambda_j \left(g_j(x^*) + \nabla g_j(x^*)^T x^*\right) \quad \text{za podm.} \quad \sum_{j \in I(x^*)} \lambda_j \nabla g_j(x^*) = -\nabla f(x^*),\ \lambda \geq 0.$$

Přípustný bod x^* je optimem primární úlohy právě tehdy, když existuje duálně přípustné λ takové, že splňuje podmínky komplementarity

$$\sum_{j \in I(x^*)} \lambda_j \left(g_j(x^*)^T x^* - g_j(x^*) - g_j(x^*)^T x^*\right) = 0,$$

neboli

$$\sum_{j \in I(x^*)} \lambda_j g_j(x^*) = 0$$

Tím dostáváme KKT podmínky (4.2). □

Na závěr uvedeme i formulaci ukazující, že KKT podmínky jsou za jistých předpokladů i postačující pro optimalitu.

Věta 4.15 (KKT postačující podmínky optimality)**.** *Buď $x^* \in \mathbb{R}^n$, buď $f(x)$ pseudokonvexní a buďte $g_j(x)$, $j \in I(x^*)$, kvazikonvexní. Pokud pro $x^* \in M$ platí KKT podmínky (4.2), pak je optimálním řešením.*

Důkaz. Pro jakýkoli přípustný bod $x \in M$ platí $g_j(x) \leq 0 = g_j(x^*)$, $j \in I(x^*)$. Z kvazikonvexity $g_j(x)$ plyne $\nabla g_j(x^*)^T(x - x^*) \leq 0$. Z KKT podmínek je $\nabla f(x^*) = -\nabla g(x^*)\lambda$, z čehož přenásobením $(x - x^*)$ dostaneme

$$\nabla f(x^*)^T(x - x^*) = -\lambda^T \nabla g(x^*)^T(x - x^*) = -\sum_{j \in I(x^*)} \lambda_j \nabla g_j(x^*)^T(x - x^*) \geq 0.$$

Z pseudokonvexity $f(x)$ pak podle věty 3.23 plyne optimalita x^*. □

4.3 Speciální případy

KKT podmínky pro lineární programování

Uvažujme úlohu lineárního programování

$$\min\ c^T x \ \text{ za podm. }\ Ax \le b.$$

Protože Abadieho podmínka je splněna pro lineární omezení, jsou předpoklady splněny a tudíž přípustný bod x^* je optimem právě tehdy, když splňuje KKT podmínky. Ty zde mají tvar existence λ takového, že

$$\lambda \ge 0, \quad c + A^T\lambda = 0, \quad (Ax - b)^T\lambda = 0.$$

Substitucí $y \equiv -\lambda$ dostáváme známé podmínky optimality v lineárním programování ze souvislosti s duální úlohou

$$y \le 0, \quad A^T y = c, \quad (Ax - b)^T y = 0.$$

KKT podmínky pro konvexní kvadratické programování

Uvažujme úlohu kvadratického programování

$$\min\ x^T Cx + d^T x \ \text{ za podm. }\ Ax \le b,\ x \ge 0,$$

kde $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická. Opět díky Abadieho podmínce jsou splněny předpoklady každé optimum x musí splňovat KKT podmínky. Ty zde mají tvar existence u, v takových, že

$$u, v \ge 0, \quad 2Cx + d + A^T u - v = 0, \quad (b - Ax)^T u = x^T v = 0.$$

Přidáme podmínky přípustnosti $Ax \le b,\ x \ge 0$ a substitucí $y \equiv b - Ax$ dostáváme

$$u, v, x, y \ge 0, \quad 2Cx + d + A^T u - v = 0, \quad y = b - Ax, \quad y^T u = x^T v = 0.$$

Označme

$$M := \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A^T & 2C \end{pmatrix}, \quad f := \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} := \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix}, \quad \tilde{y} := \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Pak KKT podmínky mají tvar

$$\tilde{y} = M\tilde{x} + f, \quad \tilde{y}^T\tilde{x} = 0, \quad \tilde{x}, \tilde{y} \ge 0.$$

Této soustavě se říká *problém lineární komplementarity.* Podmínky jsou lineární až na komplementaritu $\tilde{y}^T\tilde{x} = 0$. Úloha lineární komplementarity je silně NP-úplná (stejně jako kvadratické programování). Polynomiální situace je například pro M positivně semidefinitní (což nastane pokud C je positivně semidefinitní). Na řešení úlohy lineární komplementarity existuje řada metod, mezi něž patří i Lemkeho algoritmus. Ten funguje na principu simplexové metody s tím, že postupuje po tzv. komplementárních bázích, kdy pro každé i je v bázi $\tilde{x}_i$ nebo $\tilde{y}_i$, ale ne současně. Tím je najde řešení splňující lineární nerovnosti a také podmínku komplementarity. Konečnost Lemkeho algoritmu je zaručena pro určité typy matice M, například

- M je positivně definitní,
- M je positivně semidefinitní a $d = 0$,
- M je nezáporná s kladnou diagonálou.

Více viz kapitola 7, knihy Cottle et al. [2009]; Murty [1988] nebo český učební text Rohn [1997].

Kapitola 5

Lagrangeova dualita

Úspěch teorie duality v lineárním programování podnítil výzkum duality v nelineárním programování. Existuje několik typů duálních úloh, alo bohužel žádná není tak silná jako v lineárním programování. V této kapitole budeme uvažovat tzv. Lagrangeovu dualitu.[1)]

5.1 Lagrangeova duální úloha

Uvažujme úlohu nelineárního programování $\min_{x \in M} f(x)$ ve tvaru

$$\min\ f(x) \ \text{ za podm. } \ g(x) \leq 0,\ h(x) = 0,\ x \in \mathcal{D},$$

kde $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^J$ a $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^K$. Množina přípustných řešení M tedy v popisu může obsahovat nerovnosti, rovnosti a případně další omezení skrytá v popisu množiny $\mathcal{D}$.

Předpokládejme, že $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Množina $\mathcal{D}$ může být popsána libovolnými podmínkami. U rovnic a nerovnic se můžeme rozhodnout, zda je začleníme do popisu D nebo zda je explicitně vyčleníme – jak uvidíme, na tomto rozhodnutí pak závisí tvar a síla duální úlohy (viz příklad 5.5). Zjevně platí $M \subseteq \mathcal{D}$.

Označme $f^* \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ optimální hodnotu úlohy.

Definujme *Lagrangeovu funkci*

$$L(x, \lambda, \nu) := f(x) + \lambda^T g(x) + \nu^T h(x).$$

Koeficienty $\lambda_1, \ldots, \lambda_J, \nu_1, \ldots, \nu_K$ se nazývají Lagrangeovy koeficienty.

Lagrangeova duální funkce pak má tvar

$$L(\lambda, \nu) := \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda, \nu).$$

Funkce $L(x, \lambda, \nu)$ je lineární vzhledem k proměnným λ, ν, a proto je duální funkce, jakožto infimum lineárních funkcí, vždy konkávní.

Duální funkce dává dolní odhad na optimální hodnotu.

Tvrzení 5.1. *Pro každé $\lambda \geq 0$ a $\nu \in \mathbb{R}^K$ je $L(\lambda, \nu) \leq f^*$.*

Důkaz. Pro libovolné $\lambda \geq 0$, $\nu \in \mathbb{R}^K$ a $x \in M$ je

$$L(x, \lambda, \nu) := f(x) + \lambda^T g(x) + \nu^T h(x) \leq f(x).$$

Tudíž infimem obou stran na množině M dostaneme

$$L(\lambda, \nu) = \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda, \nu) \leq \inf_{x \in M} L(x, \lambda, \nu) \leq f^*. \qquad \square$$

[1)] Jedna z Lagrangeových původních motivací bylo hledání rovnovážného stavu v mechanice, což je stav s minimální potenciální energií. To nás vede na hledání minima v optimalizační úloze.

Snaha získat co nejlepší dolní odhad na optimální hodnotu nás pak přirozeně vede k následující formulaci *duální úlohy*

$$\max\ L(\lambda,\nu)\ \text{ za podm. }\ \lambda \geq 0,\ \nu \in \mathbb{R}^K.$$

Označme d^* optimální hodnotu této duální úlohy. Přímo z tvrzení 5.1 dostáváme:

Věta 5.2 (Slabá o dualitě)**.** *Platí $d^* \leq f^*$.*

Vyjádřit explicitně duální funkci $L(\lambda,\nu)$ není vždy jednoduché, protože jsme ji zavedli pomocí optimalizační úlohy. Na druhou stranu, pokud se to podaří, tak jsme získali duální úlohu v pěkném tvaru – je to maximalizace konkávní funkce za lineárních podmínek, tedy spadá do kategorie konvexní optimalizace.

Na rozdíl od lineárního programování neplatí silný vztah primární a duální úlohy, tedy obecně může nastat $d^* < f^*$. Rozdíl $f^* - d^*$ se nazývá *duality gap*.

Poznámka 5.3 (Interpretace duality)**.**
Geometrická interpretace: Definujme

$$G := \{(g(x), h(x), f(x));\ x \in \mathcal{D}\}.$$

Potom optimální hodnota se dá vyjádřit jako

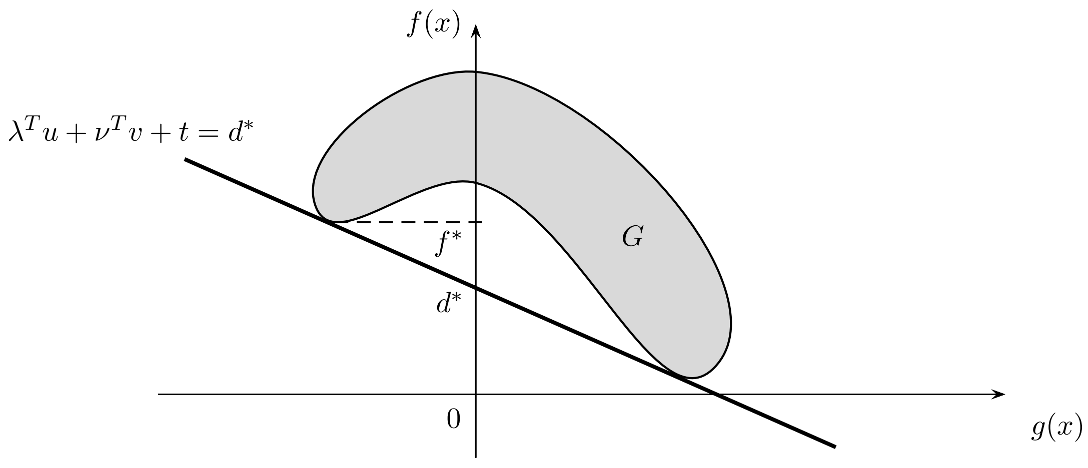
$$f^* = \inf\{t;\ (u,v,t) \in G,\ u \leq 0,\ v = 0\}$$

a Lagrangeova duální funkce jako

$$L(\lambda,\nu) = \inf\{\lambda^T u + \nu^T v + t;\ (u,v,t) \in G\}.$$

Je-li $L(\lambda,\nu)$ konečné, tak rovnice $\lambda^T u + \nu^T v + t = L(\lambda,\nu)$ definuje dolní tečnou nadrovinu ke G, která není vertikální. Hodnota $d = L(\lambda,\nu)$, kterou vytkne na ose t, je pak dolním odhadem na f^*. Proto duální úlohu můžeme interpretovat tak, že hledáme tečnou nadrovinu takovou, aby vytknutá hodnota na ose t byla co největší – maximum dá d^*.

Geometrickou interpretaci ilustruje následující obrázek případu s jednou nerovnicí $g(x) \leq 0$ a žádnou rovnicí $h(x) = 0$.



Interpretace pomocí vícekriteriálního programování: Uvažujme úlohu vícekriteriálního programování

$$\min_{x \in \mathcal{D}}\ (f(x), g_1(x), \dots, g_J(x))$$

Její skalarizace

$$\min_{x \in \mathcal{D}}\ f(x) + \lambda^T g(x),$$

která vede na eficientní řešení pro každé $\lambda \geq 0$, je vlastně duální úlohou úlohy

$$\min\ f(x)\ \text{ za podm. }\ g(x) \leq 0,\ x \in \mathcal{D}.$$

Poznámka 5.4 (Dualita a dolní mez na optimální hodnotu)**.** Pomocí duální úlohy můžeme počítat dolní mez na f^*. Pro každé duálně přípustné řešení ($\lambda \geq 0,\ \nu \in \mathbb{R}^K$) je $L(\lambda,\nu) \leq f^*$. Přidáme-li k tomu triviální fakt, že pro každé primárně přípustné $x \in M$ je $f(x) \geq f^*$, dostáváme intervalové ohraničení pro optimální hodnotu $f^* \in [L(\lambda,\nu), f(x)]$. Na tomto pozorování jsou založeny některé algoritmy, které postupným vylepšováním primárně a duálně přípustných řešení postupně zpřesňují odhad na optimální hodnotu, a v každém kroku víme, s jakou přesností ji známe.

Příklad 5.5 (Zavedení nových proměnných)**.** Uvažujme úlohu

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ f(Ax+b).$$

Protože je úloha bez omezení, dualita nic nového nepřinese. Můžeme ale duální úlohu sestrojit přeformulováním úlohy na úlohu

$$\min \ f(y) \ \text{ za podm. } \ y = Ax + b,\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m.$$

Nyní Lagrangeova funkce má tvar $L(x,y,\nu) = f(y) + \nu^T(Ax+b-y)$ a duální funkce tedy je

$$L(\nu) = \inf_{x,y} f(y) + \nu^T(Ax+b-y) = \begin{cases} \inf_y f(y) + \nu^T(b-y) & \text{pokud } A^T\nu = 0, \\ -\infty & \text{jinak.} \end{cases}$$

Duální úloha má pak tvar

$$\max_{\nu \in \mathbb{R}^m} \ \left(b^T\nu + \min\{f(y) - \nu^T y;\ A^T\nu = 0,\ y \in \mathbb{R}^m\}\right).$$

Tento příklad navíc ukazuje, že různé ekvivalentní formulace téhož problému vedou na různé duální úlohy. □

5.2 Silná dualita

Silná dualita $d^* = f^*$ platí jen za určitých předpokladů. Ukážeme ji pro konvexní úlohu a za předpokladu Slaterovy podmínky. Vztah s KKT podmínkami, které se zde nabízí, skutečně není náhodný a diskutujeme jej později v poznámce 5.11.

Věta 5.6 (Silná o dualitě)**.** *Buďte $f(x), g_1(x), \ldots, g_J(x)$ konvexní, $h_1(x), \ldots, h_K(x)$ lineární a množina $\mathcal{D}$ konvexní. Předpokládejme, že platí Slaterova podmínka*

$$\exists x^0 \in (\operatorname{int} \mathcal{D}) \cap M : g(x^0) < 0.$$

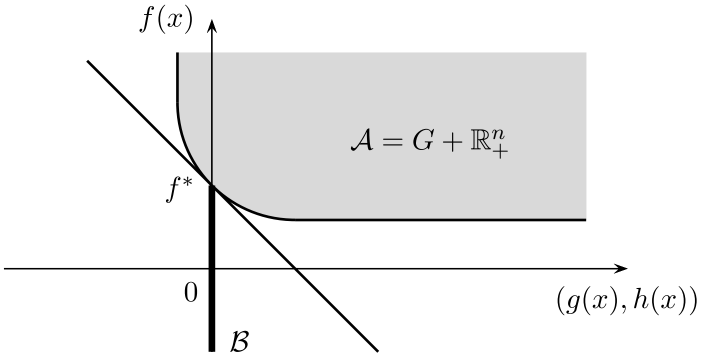
Pak $d^* = f^*$.

Důkaz. Protože funkce $h_1(x), \ldots, h_K(x)$ jsou lineární, můžeme rovnicové omezení vyjádřit jako $Ax = b$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme:

- $\operatorname{rank}(A) = K$, tedy matice A má plnou řádkovou hodnost (jinak lze redundantní řádky vynechat),
- f^* je konečné (případ $f^* = \infty$ nenastane díky Slaterově podmínce a je-li $f^* = -\infty$, tak $d^* = -\infty$).

Definujme dvě množiny:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{(u,v,t);\ u \geq g(x),\ v \geq h(x),\ t \geq f(x),\ x \in \mathcal{D}\}, \\ \mathcal{B} &:= \{(0,0,s);\ s < f^*\}. \end{aligned}$$



Evidentně, obě množiny jsou konvexní a disjunktní. Podle věty 1.1 o oddělitelnosti existuje (λ, ν, μ) a α takové, že

$$\lambda^T u + \nu^T v + \mu t \geq \alpha \quad \forall (u, v, t) \in \mathcal{A}, \tag{5.1}$$

$$\lambda^T u + \nu^T v + \mu t \leq \alpha \quad \forall (u, v, t) \in \mathcal{B}. \tag{5.2}$$

Nejprve ukážeme, že $\lambda \geq 0$. Pro spor předpokládejme $\lambda_i < 0$ a definujme vektor

$$w(\beta) := \big(g(x^0), h(x^0), f(x^0)\big) + \beta(e_i, 0, 0) \in \mathcal{A}$$

pro všechna $\beta \geq 0$. (Poznamenejme, že místo bodu x^0 bychom mohli uvažovat jakýkoliv jiný bod z množiny $\mathcal{D}$.) Pak ale hodnota $(\lambda, \nu, \mu)^T w(\beta)$ klesá do $-\infty$ pro $\beta \to \infty$, což je spor s tím, že je zdola omezená hodnotou α. Analogicky se ukáže $\mu \geq 0$.

Nyní z (5.2) dosazením vektoru $(0, 0, s)$, dostaneme $\mu s \leq \alpha$ pro všechna $s < f^*$. Limitním přechodem $s \to f^*$ pak získáme $\mu f^* \leq \alpha$. Dosazením do (5.1) dostáváme pro všechna $x \in \mathcal{D}$

$$\lambda^T g(x) + \nu^T h(x) + \mu f(x) \geq \mu f^*. \tag{5.3}$$

Nyní rozlišme dva případy:

1) Nechť $\mu > 0$. Vydělíme nerovnici (5.3) touto hodnotou a dostaneme

$$L(x, \lambda/\mu, \nu/\mu) \geq f^* \quad \forall x \in \mathcal{D},$$

z čehož i $d^* \geq L(\lambda/\mu, \nu/\mu) \geq f^*$.

2) Nechť $\mu = 0$. Nyní dostáváme

$$\lambda^T g(x) + \nu^T h(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D},$$

speciálně též $\lambda^T g(x^0) + \nu^T h(x^0) \geq 0$. Protože $g(x^0) < 0$ a $h(x^0) = 0$, máme $\lambda = 0$ a tudíž $\nu \neq 0$. Odvodili jsme tedy

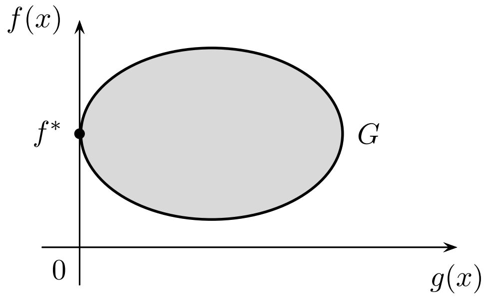
$$\nu^T h(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Protože $\nu^T h(x)$ je lineární funkce nezáporná na $\mathcal{D}$ a $\nu^T h(x^0) = 0$ pro $x^0 \in \operatorname{int} \mathcal{D}$, musí být tato funkce nulová všude (kdyby některým směrem z bodu x^0 stoupala do kladných hodnot, opačným směrem by klesala do záporných hodnot). Tím pádem $0 = \nu^T h(x) = \nu^T (Ax - b)$, tj. speciálně $0 = \nu^T A$. To je ale spor s $\operatorname{rank}(A) = K$. $\square$

Poznámka 5.7. Tvrzení věty lze zesílit a Slaterovu podmínku nahradit tzv. *zobecněnou Slaterovou podmínkou*

$$\exists x^0 \in (\operatorname{int} \mathcal{D}) \cap M : g_j(x^0) < 0 \ \forall j = 1, \ldots, J, \text{ kde } g_j(x) \text{ není lineární.}$$

Uvědomme si, že pouhá konvexita úlohy nelineárního programování nestačí k dosažení silné duality a určitá dodatečná podmínka (jako je např. Slaterova) je zapotřebí.



Na obrázku se ten špatný případ projevuje tak, že tečna v bodě $(0, 0, f^*)$ k množině $\mathcal{A}$ je vertikální. Zde by sice pořád $f^* = d^*$, ale duální optimum by se nenabylo. Konkrétní příklad, kdy je duality gap nenulový, ilustruje následující úloha.

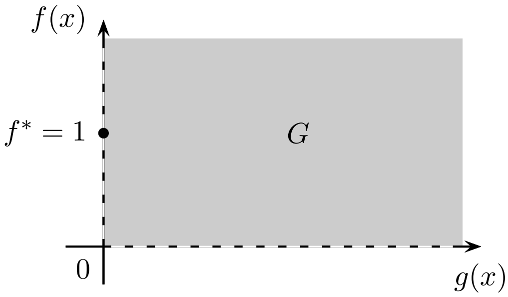
Příklad 5.8. Uvažujme úlohu konvexní optimalizace

$$\min\ e^{-x} \ \text{ za podm. } \ x^2 y^{-1} \le 0,\ y > 0.$$

Úloha má optimální řešení $x = 0$, $y > 0$ a optimální hodnotu 1. Zavedeme-li $\mathcal{D} := \{(x, y);\ y > 0\}$, tak Lagrangeova duální funkce má tvar

$$L(\lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R},\, y > 0} e^{-x} + \lambda x^2 y^{-1} = 0.$$

Tudíž optimální hodnota duální úlohy je 0 a duality gap je 1.



Geometrický náhled je následující: Množina G poznámky 5.3 je tvořena sjednocením $\{(x, y);\ x, y > 0\} \cup \{(0, 1)\}$ a bodem $(0, 1)$ žádná nevertikální tečná nadrovina neprochází. Nejtěsnější tečná nadrovina je až ta popsaná rovnicí $y = 0$. □

Existují i nekonvexní úlohy, i když dosti vzácné, pro které silná dualita platí.

Příklad 5.9. Uvažujme úlohu

$$\min\ x^T C x + d^T x \ \text{ za podm. } \ \|x\|_2 \le 1,$$

kde $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $d \in \mathbb{R}^n$. Dá se ukázat [Boyd and Vandenberghe, 2004], že duální úloha má tvar

$$\max\ -\sum_{i=1}^{n} \frac{v_i^T d}{\lambda_i - \lambda} \ \text{ za podm. } \ \lambda \ge \lambda_{\min}(C),$$

kde λ_i, v_i, $i = 1, \ldots, n$ jsou vlastní čísla a odpovídající ortonormální vlastní vektory matice C. Duální úloha je konvexní a platí silná dualita.

Zajímavé je, že nemusíme předpokládat positivní semidefinitnost matice C. Jiná zajímavost je, že pokud změníme normu například na maximovou, podmínky se stanou dokonce lineárními, ale úloha přestane mít pěkné vlastnosti, srov. věta 2.1. □

Příklad 5.10 (Lagrangeův duál k lineárnímu programu)**.** Uvažujme úlohu lineárního programování

$$\min\ c^T x \ \text{ za podm. }\ Ax = b,\ x \geq 0.$$

Lagrangeova funkce má tvar $L(x, \lambda, \nu) = c^T x - \lambda^T x + \nu^T (Ax - b)$ a duální funkce tedy podobně jako v příkladu 5.5 má tvar

$$\begin{aligned} L(\lambda, \nu) &= \inf_x\ c^T x - \lambda^T x + \nu^T (Ax - b) = -\nu^T b + \inf_x\ (c - \lambda + A^T \nu)^T x \\ &= \begin{cases} -\nu^T b & \text{pokud } c - \lambda + A^T \nu = 0, \\ -\infty & \text{jinak.} \end{cases} \end{aligned}$$

Případ „$-\infty$“ lze pro účely maximalizace vynechat, a proto má duální Lagrangeova úloha $\max_{\lambda \geq 0, \nu} L(\lambda, \nu)$ tvar

$$\max\ -\nu^T b \ \text{ za podm. }\ c - \lambda + A^T \nu = 0,\ \lambda \geq 0,$$

neboli po substituci $y := -\nu$

$$\max\ b^T y \ \text{ za podm. }\ A^T y \leq c.$$

Dostali jste tedy stejnou úlohu, jakou známe z duality v lineárním programování. Slabou dualitu máme automaticky a silnou dualitu za trochu silnějších předpokladů: Slaterovy podmínky (relativní vnitřek M je neprázdný) či zobecněné Slaterovy podmínky ($M \neq \emptyset$). □

Poznámka 5.11. Vztah Lagrangeovy duality a KKT podmínek je velmi úzký, o čem napovídá již vizuálně podobná struktura s neznámými λ; podmínka (4.2b) se dá přepsat jako $\nabla_x L(x, \lambda, \nu) = 0$.

Dá se nahlédnout, že při nulovém duality gapu optimální řešení primární a duální úlohy x^* a λ^* dává zároveň řešení KKT podmínek. Tudíž speciálně platí podmínka komplementarity $(\lambda^*)^T g(x^*) = 0$. A naopak, pokud pro konvexní úlohu body x^* a λ^* splňují KKT podmínky, pak představují optima primární a duální úlohy. □

5.3 Analýza citlivosti

Uvažujme nyní naši úlohu ve tvaru

$$\min\ f(x) \ \text{ za podm. }\ g(x) \leq u,\ h(x) = v,\ x \in \mathcal{D},$$

kde $u \in \mathbb{R}^J$ a $v \in \mathbb{R}^K$ jsou parametry, představující nějaké odchylky kolem základní hodnoty 0. Označme jako $M_{u,v}$ množinu přípustných řešení a jako $f^*(u, v)$ příslušnou optimální hodnotu, tedy $f^* = f^*(0, 0)$.

Poznamenejme, že pro konvexní úlohu je $f^*(u, v)$ konvexní jakožto funkce vzhledem k proměnným u, v, neboť její epigraf je množina $\mathcal{A}$ z věty 5.6 o silné dualitě.

Věta 5.12. *Předpokládejme, že platí silná dualita a označme λ^*, ν^* optimální řešení duální úlohy pro $(u, v) = (0, 0)$. Pak pro každé u, v platí*

$$f^*(u, v) \geq f^*(0, 0) - \lambda^{*T} u - \nu^{*T} v. \tag{5.4}$$

Důkaz. Platí pro každé $x \in M_{u,v} \subseteq \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} f^*(0, 0) &= L(\lambda^*, \nu^*) \\ &= \min_{\tilde{x} \in \mathcal{D}}\ L(\tilde{x}, \lambda^*, \nu^*) \\ &\leq f(x) + \lambda^{*T} g(x) + \nu^{*T} h(x) \\ &\leq f(x) + \lambda^{*T} u + \nu^{*T} v. \end{aligned}$$

Tedy

$$f(x) \geq f^*(0, 0) - \lambda^{*T} u - \nu^{*T} v \quad \forall x \in M_{u,v},$$

z čehož plyne (5.4). □

Geometrická interpretace nerovnosti (5.4) je, že pravá strana představuje dolní tečnou nadrovinu v bodě $(u, v) = (0, 0)$ k optimální funkci $f^*(u, v)$. Pokud je $\lambda_i^* > 0$ velké, pak optimální hodnota $f^*(u, v)$ roste hodně se změnou u_i směrem dolů, a naopak pokud $\lambda_i^* \geq 0$ je malé, pak $f^*(u, v)$ nemůže rychle klesat se změnou u_i. Tudíž duální optimální řešení λ^*, ν^* dávají důležitou informaci o citlivosti optimální hodnoty na změnu pravých stran. Za silnějších předpokladů dostaneme ještě silnější výsledek.

Věta 5.13. *Za předpokladů věty 5.12 nechť $f^*(u, v)$ je diferencovatelná v bodě $(u, v) = (0, 0)$. Pak platí*

$$\nabla f^*(0, 0) = -(\lambda^*, \nu^*),$$

čili $\frac{\partial f^*(0,0)}{\partial u_i} = -\lambda_i^*$, $\frac{\partial f^*(0,0)}{\partial v_i} = -\nu_i^*$.

Důkaz. Přímo z (5.4), neboť $t(u, v) := f^*(0, 0) - \lambda^{*T} u - \nu^{*T} v$ je tečna funkce $f^*(u, v)$ v bodě $(u, v) = (0, 0)$. □

Tudíž lokálně kolem bodu $(u, v) = (0, 0)$ nám tečna (5.4) velmi přesně aproximuje chování optimální funkce.

Příklad 5.14 (Ekonomické „shadow prices“)**.** Předpokládejme, že v naší optimalizační úloze představuje účelová funkce $f(x)$ náklady (resp. $-f(x)$ ekonomický výdělek) a u, v jsou kapacity zdrojů (práce, zásob,...) Pak podle naší interpretace hodnota λ_i^* říká jak se změní výdělek při změně jednotky kapacity. Pokud lze dokoupit zvýšení kapacity (zvětšit sklad, zvýšit výdaje na reklamu, atp.), mohu cenu navýšení porovnat s λ_i^* a určit, zda se navýšení vyplatí. Proto se duální optima λ^* nazývají občas *stínové ceny.* □

5.4 Sedlová funkce

Definice 5.15. Dvojice bodů $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{n+m}$ se nazývá *sedlový bod* funkce $f\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ pokud platí

$$f(x^*, y) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x, y^*), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m.$$

Tudy $f(x^*, y^*)$ je minimální hodnota funkce $f(x, y)$ při pevném $y = y^*$ a maximální hodnota $f(x, y)$ při pevném $x = x^*$.

Věta 5.16. *Platí*

$$\sup_y \inf_x f(x, y) \leq \inf_x \sup_y f(x, y). \tag{5.5}$$

Důkaz. Protože $\inf_x f(x, y) \leq f(x, y)$ pro každé x, y, tak supremem obou stran přes y dostaneme

$$\sup_y \inf_x f(x, y) \leq \sup_y f(x, y) \quad \forall x.$$

Nyní stačí uvažovat infimum přes x. □

Věta 5.17. *Je-li (x^*, y^*) sedlový bod, pak*

$$f(x^*, y^*) = \sup_y \inf_x f(x, y) = \inf_x \sup_y f(x, y).$$

Důkaz. Protože

$$\sup_y \inf_x f(x, y) \geq \inf_x f(x, y^*) = f(x^*, y^*) = \sup_y f(x^*, y) \geq \inf_x \sup_y f(x, y),$$

tak díky (5.5) platí všude rovnost. □

Interpretace Lagrangeovy duality pomocí sedlové funkce

Uvažujme optimalizační úlohu
$$\min\ f(x)\ \text{ za podm. }\ g(x) \le 0.$$
Její Lagrangeova funkce má tvar
$$L(x\lambda) = f(x) + \lambda^T g(x),$$
a optimální hodnota duální úlohy se dá vyjádřit
$$d^* = \sup_{\lambda \ge 0}\ \inf_x\ L(x\lambda).$$

Protože
$$\sup_{\lambda \ge 0}\ L(x\lambda) = \sup_{\lambda \ge 0}\ f(x) + \lambda^T g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pokud } g(x) \le 0, \\ \infty & \text{jinak,} \end{cases}$$
tak můžeme optimální hodnotu vyjádřit
$$f^* = \inf_{x: g(x) \le 0}\ f(x) = \inf_x\ \sup_{\lambda \ge 0}\ L(x\lambda)$$

Ze vztahu (5.5) dostáváme ihned slabou dualitu
$$d^* = \sup_{\lambda \ge 0}\ \inf_x\ L(x\lambda) \le \inf_x\ \sup_{\lambda \ge 0}\ L(x\lambda) = f^*$$
a existence sedlového bodu pak zaručuje silnou dualitu $f^* = d^*$

Interpretace Lagrangeovy duality z pohledu teorie her

Uvažujme hru s nulovým součtem, ve které $x \in X$ jsou strategie prvního hráče a $y \in Y$ strategie druhého hráče. Funkce $f(x, y)$ udává prodělek prvního hráče a zároveň výdělek druhého hráče.

Nechť první hráč hraje první, tedy vybere $x \in X$ a druhý hráč hraje následně a vybere $y \in Y$. Pokud první hráč chce minimalizovat nejhorší ztrátu, pak zvolí strategii x^*, která je optimálním řešením úlohy
$$\min_{x \in X}\ \max_{y \in Y}\ f(x, y).$$
Druhý hráč pak přirozeně volí optimum úlohy $\max_{y \in Y}\ f(x^*, y)$. Výdělek druhého hráče tedy je
$$\min_{x \in X}\ \max_{y \in Y}\ f(x, y).$$
Pokud druhý hráč hraje první, pak jeho výdělek analogicky je
$$\max_{y \in Y}\ \min_{x \in X}\ f(x, y).$$
Tudíž podle vztahu (5.5) je výhodnější hrát jako druhý. Pokud výplatní funkce má sedlový bod, pak představuje Nashovo ekvilibrium a je pak jedno, který hráč začne jako první.

Ekonomická interpretace Lagrangeovy duality

Podobnějako v příkladu 5.14 uvažujme optimalizační úlohu
$$\min\ f(x)\ \text{ za podm. }\ g(x) \le 0,$$
kde $f(x)$ odpovídá nákladům či $-f(x)$ výdělku. Označme jako f^* optimální hodnotu.

Interpretujme podmínky $g(x) \le 0$ jako omezení zdrojů s tím, že hranice není pevná a lze podmínku porušit, ale musíme zaplatit cenu $\lambda_i g_i(x)$ (a naopak při nedočerpání tuto cenu dostaneme). Tato úprava pak vede na matematickou formulaci
$$\min_x\ f(x) + \lambda^T g(x) = \min_x\ L(x, \lambda) = L(\lambda).$$

Zajímá-li nás nejhorší případ, tak to vede na duální úlohu

$$d^* = \max_{\lambda \geq 0} L(\lambda).$$

Slabá dualita $d^* \leq f^*$ zde vychází přirozeně, neboť se nám rozšířil výběr možností. Hodnota duality gapu $f^* - d^*$ pak udává nejmenší vylepšení zisku. Je-li $f^* = d^*$, pak pro firmu není žádnou výhodou platit za překročení limitů.

5.5 Speciální případy – konvexní kvadratické programování

Uvažujme úlohu konvexního kvadratického programování (srov. sekce 2.1) ve tvaru

$$\min\ x^T Cx + d^T x \ \text{ za podm. } \ Ax \leq b,$$

kde $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je positivně semidefinitní, $d \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Protože $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$, má Lagrangeova duální úloha tvar

$$L(\lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} x^T Cx + d^T x + \lambda^T (Ax - b).$$

Účelová funkce této podúlohy je konvexní, minimum se tedy nabyde pro bod, ve kterém je gradient nulový, tedy množina optimálních řešení podúlohy je popsána soustavou

$$2Cx + d + A^T \lambda = 0. \tag{5.6}$$

(Kdyby $C \succ 0$, tak optimum je jednoznačné a explicitně vyjádřitelné $x = -\frac{1}{2}C^{-1}(d + A^T\lambda)$.) Duální úloha má tedy tvar

$$\max\ x^T Cx + d^T x + \lambda^T (Ax - b) \ \text{ za podm. } \ 2Cx + d + A^T \lambda = 0,\ \lambda \geq 0.$$

Přenásobením (5.6) zleva vektorem x^T dostaneme

$$2x^T Cx + d^T x + \lambda^T Ax = 0.$$

Dosazením do účelové funkce duální úlohy máme

$$\max\ -x^T Cx - b^T \lambda \ \text{ za podm. } \ 2Cx + d + A^T \lambda = 0,\ \lambda \geq 0.$$

Tato duální úloha se též nazývá *Dornův duál* a je to opět ve tvaru konvexního kvadratického programu. Z konvexity primární úlohy a linearity podmínek z omezení pak podle poznámky 5.7 platí silná dualita pokud primární úloha je přípustná.

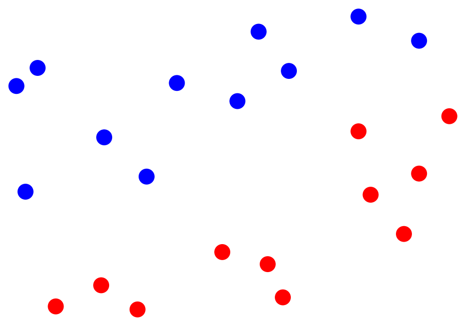
5.5.1 Support vector machines

Konvexní kvadratické programování a jeho duál hrají důležitou roli pro klasifikaci pomocí tzv. *support vector machines* [Burges, 1998]. Ty se datují do počátku 80. let a jedním z hlavních autorů byl V.N. Vapnik.

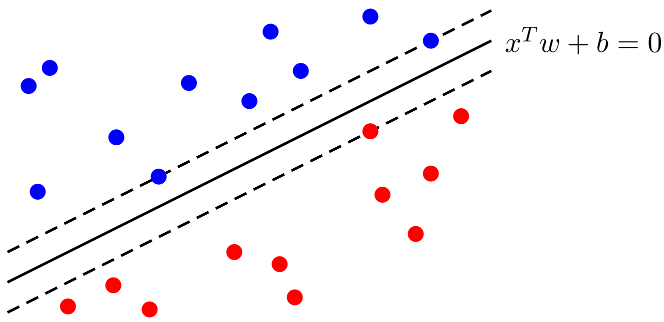
Úloha zní takto. Mějme m dat ve tvaru vektorů $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$, rozdělených do dvou skupin. Příslušnost k dané skupině je určena indikátorem $y_i \in \{\pm 1\}$. To jsou tzv. trénovací data, která nám pomohou vybudovat klasifikátor, který pak bude umět více či méně úspěšně odhadovat příslušnost ke skupině pro další data. Tento princip se používá v problému rozpoznávání vzorků (*pattern recognition*), například rozpoznání písmen na obrázku atp.

Lineární případ. Prvním cílem bude najít (nebo ukázat, že neexistuje) nadrovinu v $\mathbb{R}^n$, která oddělí obě skupiny bodů. To nám dá jednoduchý klasifikátor. Nechť má nadrovina popis $x^T w + b = 0$, kde $w \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ jsou neznámé. Pokud jsou data oddělitelná, pak jsou typicky oddělitelná mnoha způsoby, proto budeme hledat nejlepší oddělující nadrovinu. Zde nejlepší znamená, že budeme chtít data oddělit co nejširším pásem. Pokud se podaří oddělit data tak, že

$$\begin{aligned} x_i^T w + b &\geq 1, \quad \forall i : y_i = 1, \\ x_i^T w + b &\leq -1, \quad \forall i : y_i = -1, \end{aligned}$$



(a) Trénovací data pro klasifikaci.



(b) Nejširší oddělující pás.

Obrázek 5.1: Support vector machines – lineární případ. Modré tečky přísluší bodům s $y_i = 1$ a červené pro body s $y_i = -1$.

pak pás určený nerovnostmi $-1 \leq x_i^T w + b \leq 1$ je široký $2/\|w\|$. To nás tedy vede na optimalizační úlohu

$$\min\ w^T w \quad \text{za podm.}\quad y_i(x_i^T w + b) \geq 1\ \forall i = 1, \ldots, m.$$

Její duál má tvar

$$\min\ w^T w + e^T u \quad \text{za podm.}\quad u \leq 0,\ 2w + \sum_{i=1}^m y_i x_i u_i = 0,\ \sum_{i=1}^m y_i u_i = 0.$$

Substitucí za

$$w := -\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^m y_i x_i u_i \tag{5.7}$$

dostaneme výraz

$$\min\ \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^m y_i y_j x_i^T x_j u_i u_j + e^T u \quad \text{za podm.}\quad u \leq 0,\ \sum_{i=1}^m y_i u_i = 0.$$

Je-li u^* optimální řešení, pak optimum (w^*, b^*) primární úlohy spočítáme následovně. Podle (5.7) určíme w^*. Je-li $u^* = 0$, pak i $w^* = 0$ a tudíž primární úloha nemá přípustné řešení. Jinak množina aktivních podmínek $I(u^*) := \{i;\ u_i^* \neq 0\}$ je neprázdná. Zvolme $i \in I(u^*)$. Z komplementarity (viz poznámka 5.11) je splněná i-tá nerovnice jako rovnost $y_i(x_i^T w^* + b^*) = 1$, z čehož vyjádříme $b^* := y_i - x_i^T w^*$.

Poznamenejme, že aktivní podmínky odpovídají těm bodům trénovacích dat, kterých se dotýká optimální oddělující pás. Hrají tedy pro klasifikaci stěžejní roli.

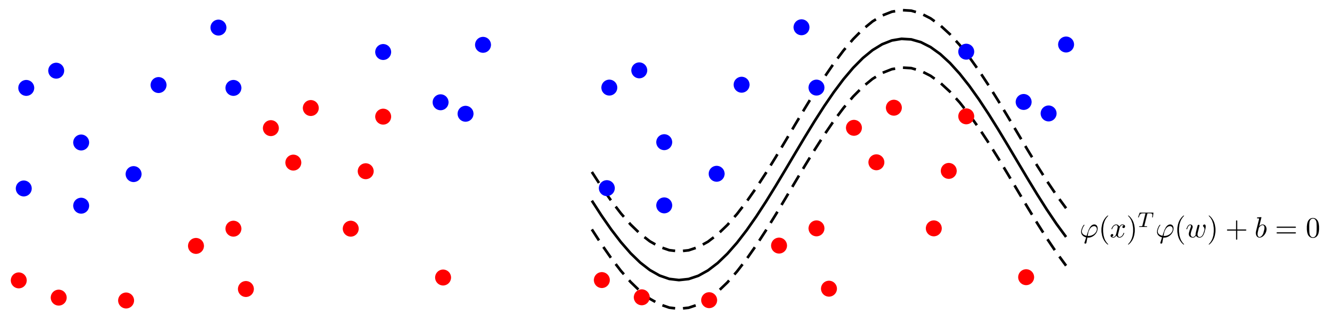
Nelineární případ. Co však, když data nejsou oddělitelná nadrovinou? Zde je ústřední myšlenkou zobrazit data do prostoru vyšší dimenze, kde je větší naděje na oddělitelnost. Uvažujme funkci $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$, kterou zobrazíme x_i na $\varphi(x_i)$. Postup je nyní stejný, jenom pracujeme v prostoru $\mathbb{R}^N$ obrazů, kde $n < N$. Nejlepší oddělitelnou nadrovinu najdeme úlohou

$$\min\ v^T v \quad \text{za podm.}\quad y_i(\varphi(x_i)^T v + b) \geq 1\ \forall i = 1, \ldots, m, \tag{5.8}$$

nebo její duální

$$\min\ \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^m y_i y_j \varphi(x_i)^T \varphi(x_j) u_i u_j + e^T u \quad \text{za podm.}\quad u \leq 0,\ \sum_{i=1}^m y_i u_i = 0. \tag{5.9}$$

Nyní se projeví výhoda duální úlohy. Zatímco primární má m omezení a $N+1$ proměnných (tedy dimenze roste s velikostí N), tak duální má stále stejnou dimenzi: $m+n$ omezení a m proměnných. Jediná věc, která



(a) Body nejsou oddělitelné nadrovinou. (b) Oddělující pás pro projekci z $\mathbb{R}^N$ zpět do $\mathbb{R}^n$.

Obrázek 5.2: Support vector machines – nelineární případ. Modré tečky přísluší bodům s $y_i = 1$ a červené pro body s $y_i = -1$.

závisí na N, je skalární součin $\varphi(x_i)^T\varphi(x_j)$. Při vhodné volbě funkce $\varphi(x)$ jej lze vyhodnotit rychle, a to dokonce i když $N = \infty$; to nastává, když $\varphi(x)$ zobrazuje do prostoru funkcí. Skalární součin $K(x_i, x_j) := \varphi(x_i)^T\varphi(x_j)$ se v tomto kontextu nazývá *kernel function*, a v zásadě pro řešení úlohy stačí znalost $K(x_i, x_j)$ namísto $\varphi(x)$.

Jak pak takový klasifikátor používáme? Buď u^* optimální řešení (5.9), pak jednoduše podle (5.7) hledané optimum $v^* = \varphi(w^*)$ úlohy (5.8) splňuje

$$\varphi(w^*) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} y_i\varphi(x_i)u_i^*.$$

Nemusíme počítat w^* explicitně, stačí znát pouze jeho obraz $\varphi(w^*)$. Navíc u^* má typicky mnoho nulových složek, a proto je výhodnější uvažovat jen aktivní členy

$$\varphi(w^*) = -\frac{1}{2}\sum_{i\in I(u^*)} y_i\varphi(x_i)u_i^*,$$

kde $I(u^*) := \{i;\ u_i^* \neq 0\}$. Vektory x_i, $i \in I(u^*)$ je nazývají *support vectors*, protože jejich obrazy $\varphi(x_i)$ se dotýkají optimálního oddělujícího pásu. Navíc ze souvislosti duálních úloh pro $i \in I(u^*)$ musí být splněna nerovnice z (5.8) jako rovnost $\varphi(x_i)^T\varphi(w^*)+b = y_i$, tedy druhou část optima b^* primární úlohy spočítáme jako

$$\begin{aligned} b^* &:= y_i - \varphi(x_i)^T\varphi(w^*) = y_i + \frac{1}{2}\sum_{i\in I(u^*)} y_i\varphi(x_i)^T\varphi(x_i)u_i^* \\ &= y_i + \frac{1}{2}\sum_{i\in I(u^*)} y_iK(x_i, x_i)u_i^* + b^*. \end{aligned}$$

Nový bod $x \in \mathbb{R}^n$ pak klasifikujeme podle znaménka hodnoty

$$\begin{aligned} \varphi(x)^T\varphi(w^*) + b^* &= -\frac{1}{2}\sum_{i\in I(u^*)} y_i\varphi(x)^T\varphi(x_i)u_i^* + b^* \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i\in I(u^*)} y_iK(x, x_i)u_i^* + b^*. \end{aligned}$$

Vidíme, že i zde stačí znalost kernelové funkce K a netřeba znát explicitně jak vypadá φ.

Příklad 5.18. Uvažujme kernelovou funkci ve tvaru $K(x_i, x_j) = (x_i^T x_j)^2$. Dá se vůbec vyjádřit ve tvaru $K(x_i, x_j) = \varphi(x_i)^T\varphi(x_j)$? Ano, například pro $\varphi(y) = (y_1^2, \sqrt{2}y_1y_2, y_2^2)^T$ a $n = 2$.

Jiná kernelová funkce je $K(x_i, x_j) = e^{-\|x_i-x_j\|^2/2\sigma^2}$, která odpovídá nekonečně-dimenzionálnímu prostoru.

Dalšími příklady jsou $K(x_i, x_j) = (x_i^T x_j + 1)^p$ či $K(x_i, x_j) = \tanh(\kappa x_i^T x_j - \delta)$. □

5.6 Speciální případy – semidefinitní programování

Stopa matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je definovaná $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ a relace $A \succeq B$ pro symetrické matice A, B značí, že $A - B$ je positivně semidefinitní. Uvedeme několik základních vlastností, týkajících se stopy.

Lemma 5.19. *Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ symetrické. Pak*

(1) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$*,*

(2) Jsou-li navíc $A, B \succeq 0$, pak $\mathrm{tr}(AB) \geq 0$*.*

Důkaz.

(1) $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \mathrm{tr}(BA)$.

(2) Z positivní semidefinitnosti můžeme vyjádřit $A = LL^T$ pro nějakou čtvercovou matici L. Pak $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(LL^TB) = \mathrm{tr}(L^TBL) \geq 0$ s použitím předchozí vlastnosti a toho, že L^TBL je positivně semidefinitní, a tudíž její stopa, jakožto součet vlastních čísel, je nezáporná. □

Uvažujme úlohu *semidefinitního programování* (srov. sekce 2.3) ve tvaru[2)]

$$\min\ c^Tx \quad \text{za podm.}\quad A_0 + \sum_{i=1}^{n} x_iA_i \preceq 0,$$

kde $A_0, A_1 \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou symetrické. Označme jako f^* optimální hodnotu a jako

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n;\ A_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_iA_i \preceq 0\}$$

množinu přípustných řešení. Nyní je otázka jak zavést analogii Lagrangeovy duality, protože se nejedná o klasické podmínky typu rovnost či nerovnost. Protože zobrazení $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$ představuje skalární součin na prostoru symetrických matic, adaptujeme Lagrangeovu funkci to tvaru

$$\begin{aligned} L(x, Z) &:= c^Tx + \mathrm{tr}\left((A_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_iA_i)Z\right) \\ &= \mathrm{tr}(A_0Z) + \textstyle\sum_{i=1}^{n}(c_i + \mathrm{tr}(A_iZ))x_i. \end{aligned}$$

Lagrangeovu duální funkci zavedeme také analogicky jako

$$L(Z) := \inf_{x\in\mathbb{R}^n} L(x, Z) = \begin{cases} \mathrm{tr}(A_0Z) & \text{pokud } c_i + \mathrm{tr}(A_iZ) = 0\ \forall i = 1, \ldots, n, \\ -\infty & \text{jinak.} \end{cases}$$

Matice Z zde hraje roli Lagrangeových multiplikátorů, a narozdíl od klasické Lagrangeovy duality zde nepožadujeme její nezápornost, ale positivní semidefinitnost.

Tvrzení 5.20. *Je-li $Z \succeq 0$, pak $L(Z) \leq f^*$.*

Důkaz. Je-li $Z \succeq 0$, tak podle lemmatu 5.19 platí vztah $\mathrm{tr}\left((A_0 + \sum_{i=1}^{n} x_iA_i)Z\right) \leq 0$ pro všechna přípustná x, a tím pádem $L(x, Z) \leq f(x)$. Infimem obou stran nerovností dostaneme požadovaný vztah

$$L(Z) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} L(x, Z) \leq \inf_{x\in M} L(x, Z) \leq \inf_{x\in M} f(x) = f^*.$$ □

Abychom dostali co nejlepší dolní mez, je opět přirozené zavést duální úlohu jako maximalizaci Lagrangeovy duální funkce

$$\max\ \mathrm{tr}(A_0Z) \quad \text{za podm.}\quad Z \succeq 0,\ c_i + \mathrm{tr}(A_iZ) = 0\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Vidíme, že duální úloha má tvar opět semidefinitního programu Označme d^* optimální hodnotu této duální úlohy. Z tvrzení 5.20 ihned dostáváme:

[2)]Pokud hledáme pouze přípustné řešení semidefinitního programu bez účelové funkce, pak se problém nazývá lineární maticová nerovnost, anglicky *linear matrix inequality (LMI).*

Věta 5.21 (Slabá o dualitě)**.** *Platí* $d^* \leq f^*$.

Protože je semidefinitní program konvexní optimalizační úlohou, můžeme dosáhnout silné duality za předpokladu analogie Slaterovy podmínky

$$\exists x \in \mathbb{R}^n : A_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i A_i \prec 0.$$

Následující příklad ilustruje situaci, kdy se optimální hodnota nenabyde a také případ, kdy neplatí silná dualita.

Příklad 5.22 (Pataki, 2019)**.** Uvažujme semidefinitní program

$$\min\ -2x_1 \ \text{ za podm. } \ -\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + x_1\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \preceq 0.$$

Úloha má jediné přípustné řešení $x_1 = 0$ a optimální hodnota je 0. Duální úloha má tvar

$$\max\ -z_{11} \ \text{ za podm. } \ -\begin{pmatrix}z_{11} & 1\\1 & z_{22}\end{pmatrix} \succeq 0.$$

Její optimální hodnota je 0, ale nenabyde se pro žádné přípustné řešení.

Nyní uvažujme semidefinitní program

$$\min\ -x_2 \ \text{ za podm. } \ -\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + x_1\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} \preceq 0.$$

Optimální hodnota je 0, protože každé přípustné řešení (x_1, x_2) splňuje $x_2 = 0$. Duální úloha má tvar

$$\max\ -z_{11} - z_{22} \ \text{ za podm. } \ Z \succeq 0,\ z_{11} = 0,\ z_{22} + 2z_{12} = 1.$$

Z podmínek musí $z_{11} = z_{12} = z_{21} = 0$ a $z_{22} = 1$, a tudíž duální optimální hodnota je -1. Duality gap je tak roven 1. ☐

Příklad 5.23. Semidefinitní programování zobecňuje lineární programování, protože lineární podmínky snadno vyjádříme jako semidefinitní. Například lineární program $\min\ c^T x$ za podm. $Ax \leq b$ se přepíše ekvivalentně jako semidefinitní program s diagonální maticí

$$\min\ c^T x \ \text{ za podm. } \ \begin{pmatrix}A_{1*}x - b_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_{m*}x - b_m\end{pmatrix} \preceq 0.$$ ☐

Příklad 5.24. Řada vztahů okolo vlastních čísel se dá vyjádřit jako semidefinitní podmínka. Například největší vlastní číslo $\lambda_{\max}$ symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\lambda_{\max} = \min\ t \ \text{ za podm. } \ t \cdot I_n \succeq A.$$

Největší vlastní číslo pevné matice se samozřejmě dá spočítat efektivněji numericky, ale toto vyjádření je užitečné pokud máme další omezení. Například, chceme-li určit nejmenší z maximálních vlastních čísel matic ležících na úsečce mezi maticemi A_1 a A_2, můžeme to zformulovat jako semidefinitní program

$$\min\ t \ \text{ za podm. } \ t \cdot I_n \succeq x_1A_1 + x_2A_2,\ x \geq 0,\ x_1 + x_2 = 1.$$ ☐

Důležité použití semidefinitního programování je pak aproximace NP-těžkých kombinatorických úloh. Vhodná relaxace NP-těžké úlohy vede na semidefinitní programování, které je řešitelné efektivně. Pro Max-Cut pak tento přístup dává aproximační algoritmus s garantovanou konstantní relativní chybou.

Kapitola 6

ℓ_1-metody pro problémy kardinality

Kardinalita. Kardinalitou vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ rozumíme počet jeho nenulových složek a značíme

$$\|x\|_0 = |\{i;\, x_i \neq 0\}|.$$

Toto značení připomíná vektorovou ℓ_p-normu

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|^p}.$$

Skutečně, kardinalitu dostaneme limitním přechodem pokud zanedbáme odmocninu:

$$\|x\|_0 = \lim_{p\to 0^+} \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|^p.$$

Nicméně, $\|x\|_0$ již vektorovou normu netvoří, protože nesplňuje trojúhelníkovou nerovnost a pozitivní homogenitu. Navíc není ani konvexní (pouze kvazikonkávní na $\mathbb{R}^n_+$). Přesto se toto značení používá.[1)]

Problémy kardinality. Kardinalita se často vyskytuje v optimalizačních úlohách souvisejících s informatikou jako je teorie informace, statistika či zpracování signálu. Typicky mají formu

$$\min\ \|x\|_0 \ \text{ za podm. }\ x \in M,$$

nebo

$$\min\ f(x) \ \text{ za podm. }\ x \in M,\ \|x\|_0 \leq k.$$

Složitost. Je zřejmé, že diskrétní podstata problému způsobuje výpočetní potíže, a že problémy s kardinalitou jsou často NP-těžké. Pro ilustraci ukážeme převod z 0/1 celočíselného programování, kdy úlohu

$$\min\ c^T x \ \text{ za podm. }\ Ax \leq b,\ x \in \{0,1\}^n$$

převedeme na

$$\min\ c^T x \ \text{ za podm. }\ Ax \leq b,\ \|(x, e-x)\|_0 \leq n.$$

Tato transformace funguje díky tomu, že $y \in \{0,1\}$ je ekvivalentní s nerovností $\|y\|_0 + \|1-y\|_0 \leq 1$, neboli $\|(y, 1-y)\|_0 \leq 1$.

6.1 Aplikace

Výběr regresorů. Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matice pozorování a vektor $b \in \mathbb{R}^m$ výstup pozorování. Hodnota m udává počet pozorování. Úloha lineární regrese má tvar $b \approx Ax$, tj. chceme vysvětlit výstup jako lineární vztah vstupu a $x \in \mathbb{R}^n$ jsou hledané regresory. Protože typicky nelze rovnost $b = Ax$ splnit přesně, statistický model je $b = Ax + err$, kde err jsou náhodné chyby podle určitého rozdělení. Za použití metody nejmenších čtverců pak optimalizační vyjádření je $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$.

[1)] Autorem je americký statistik David Donoho.

Typicky chceme vysvětlit b pomocí malého počtu regresorů, což vede na formulaci

$$\min \ \|Ax - b\|_2 \ \text{ za podm. } \ \|x\|_0 \leq k,$$

kde k je zvolená konstanta.

Například chceme určit závislost délky života na různých faktorech, jako je kouření, pití alkoholu, váha, atp. Pochopitelně mohu začlenit velké množství faktorů (výška, politická a sexuální orientace,...), ale pak model bude příliš komplikovaný a nic neříkající. Cílem je tedy vysvětlit vysvětlovanou proměnnou (délku života) pomocí málo klíčových faktorů. Praktičtějším přikladem je vysvětlení různých funkcí DNA pomocí jejich klíčových úseků.

Minimalizace počtů porušení. Uvažujme soustavu nerovnic

$$f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

která je neřešitelná, ale přesto bychom chtěli najít nějaké „řešení“. Zde je přirozené hledat vektor, který splňuje co nejvíce nerovnic, neboli porušuje co nejméně omezení:

$$\min \ \|y\|_0 \ \text{ za podm. } \ f_i(x) \leq y_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Například při rozvrhování kalendáře na vánoční večírky chceme najít takový plán, abychom potkali co nejvíce kamarádů, tedy minimalizovali počet těch, které mineme. Jiným příkladem je tvorba školního rozvrhu s minimalizací počtu nesplněných požadavků od učitelů.

Klasifikace a nejméně chybami. Uvažujme data $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^n \times \{\pm 1\}$, $i = 1, \dots, m$, a hledáme lineární klasifikátor $a^T x + b = 0$ tak, aby

$$y_i = \operatorname{sgn}(a^T x_i + b), \quad i = 1, \dots, m,$$

neboli

$$y_i(a^T x_i + b) > 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

A pokud to není možné, aby počet chyb byl minimální. To vede na formulaci

$$\min \ \|z\|_0 \ \text{ za podm. } \ y_i(a^T x_i + b) + z_i \geq 1, \ i = 1, \dots, m.$$

Díky positivní homogenitě je podmínka $y_i(a^T x_i + b) + z_i > 0$ ekvivalentní s $y_i(a^T x_i + b) + z_i \geq 1$.

V klasifikaci problém kardinality vystupuje ještě jednou, když chceme klasifikovat tak, aby vektor normály a měl co nejvíce nulových složek

$$\min \ \|a\|_0 \ \text{ za podm. } \ y_i(a^T x_i + b) + z_i \geq 1, \ i = 1, \dots, m.$$

Tento problém se nazývá *feature selection* a hledáme v něm hlavní rysy pro klasifikaci. Tyto hlavní rysy odpovídají nenulovým složkám vektoru a. Dimenze n tedy z principu je větší a není takový problém s oddělitelností jako s tím najít vhodnou oddělující nadrovinu a ty důležité rysy.

6.2 Aproximace pomocí ℓ_1-normy

Optimalizační úlohy s kardinalitou jde v principu řešit hrubou silou dekompozicí na 2^n podúloh podle toho jestli x_i je nulové či nikoli. To je však příliš výpočetně náročné, takže se zaměříme na dobrou aproximaci.

Základem efektivní aproximace je nahrazení $\|x\|_0$ součtovou normou $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$. Potom se dá celá řada problémů řešit efektivně, a navíc součtová norma dobře aproximuje kardinalitu (z povrchního hlediska má $\|x\|_0$ nejblíže k ℓ_1-normě ze všech ℓ_p-norem)

Úlohu

$$\min \ \|x\|_0 \ \text{ za podm. } \ x \in M,$$

pak nahradím aproximovanou úlohou

$$\min \ \|x\|_1 \ \text{ za podm. } \ x \in M.$$

Navíc norma $\|x\|_1$ je nyní „hezká“, neboť jde přeformulovat lineárním způsobem jako

$$\min \ e^T y \ \text{ za podm. } \ x \in M, \ x \leq y, \ -x \leq y.$$

Interpretace pomocí konvexní relaxace. Předpokládejme omezenost množiny přípustných řešení a úlohu s kardinalitou

$$\min \ \|x\|_0 \ \text{ za podm. } \ x \in M, \ |x| \leq \alpha e$$

přeformulujeme jako úlohu celočíselného programování

$$\min \ e^T z \ \text{ za podm. } \ x \in M, \ |x| \leq \alpha z, \ z \in \{0,1\}^n.$$

Standardní celočíselná relaxace vede na lineární program

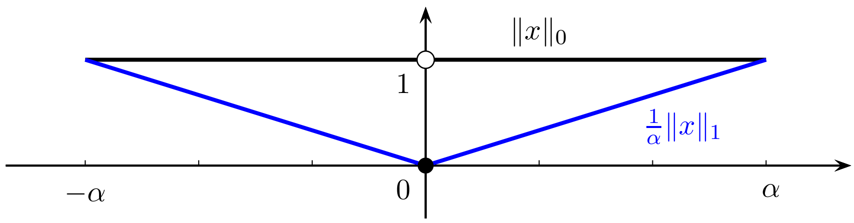
$$\min \ e^T z \ \text{ za podm. } \ x \in M, \ |x| \leq \alpha z, \ 0 \leq z \leq e.$$

Pro optimální řešení se nerovnost $|x| \leq \alpha z$ nabyde jako rovnost, a z ní odvodíme

$$\min \ \tfrac{1}{\alpha} e^T |x| \ \text{ za podm. } \ x \in M,$$

což je ℓ_1-norm aproximace.

Interpretace pomocí konvexního underestimátoru. Konvexní underestimátor funkce $f(x)$ je jakákoli konvexní funkce $g(x)$ splňující $g(x) \leq f(x)$ na příslušné množině. Konvexní obálka $f^{env}(x)$ funkce $f(x)$ je pak nejlepší konvexní underestimátor. Ten za obecných předpokladů existuje, protože pro dva konvexní underestimátory $g_1(x), g_2(x)$ je funkce $\max\{g_1(x), g_2(x)\}$ také konvexní underestimátor. Tudíž $f^{env}(x)$ je supremem všech konvexních underestimátorů. Epigraf funkce $f^{env}(x)$ je pak konvexním obalem epigrafu funkce $f(x)$.



Konvexní obálka funkce $\|x\|_0$ na intervalu $x \in [-\alpha, \alpha]$ je funkce $\frac{1}{\alpha}|x|$. Zobecněno na dimenzi n, konvexní obálka funkce $\|x\|_0$ na $x \in [-\alpha, \alpha]^n$ je funkce $\frac{1}{\alpha}\|x\|_1$.

Vylepšení aproximace. Aproximaci úlohy $\min_{x \in M} \|x\|_0$ ještě vylepšíme tím, že vezmeme optimum x^R aproximované úlohy, a jeho pattern (pozice nulových a nenulových prvků), a s tím to patternem vyřešíme původní úlohu. Tedy definujeme vektor

$$s_i := \begin{cases} 1 & \text{pokud } x_i^R \neq 0, \\ 0 & \text{pokud } x_i^R = 0 \end{cases}$$

a vyřešíme úlohu

$$\min \ \|x\|_0 \ \text{ za podm. } \ x \in M, \ x_i = 0 \ \forall i : s_i = 0.$$

Iterativní vylepšovací algoritmus. Řešení nalezené ℓ_1-norm aproximací lze ještě vylepšovat jednoduchou iterativní metodou. Uvažujme úlohu $\min_{x \in M} \|x\|_0$, zvolme počáteční vektor vah $w := e$, a iterativně opakujme

1: vyřeš váženou ℓ_1-norm aproximaci $\min_{x \in M} \|\operatorname{diag}(w)x\|_1$, a buď x^* optimální řešení,

2: uprav váhy $w_i := \dfrac{1}{\varepsilon + |x_i^*|}$, $i = 1, \ldots, n$.

Algoritmus typicky konverguje po nejvýše pěti iteracích. V každé iteraci řešíme váženou ℓ_1-norm aproximaci s tím, že větší váhu dáváme složkám s malou hodnotou $|x_i^*|$.

Příklad 6.1. Úlohu lineární regrese

$$\min \ \|Ax-b\|_2 \ \text{ za podm. } \ \|x\|_0 \le k, \ x \in \mathbb{R}^n$$

aproximujeme úlohou konvexního kvadratického programování

$$\min \ \|Ax-b\|_2 \ \text{ za podm. } \ \|x\|_1 \le k, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Dá se ukázat, že pokud počet pozorování $m \ge c \cdot k \cdot \log(n)$, kde c je určitá absolutní konstanta a prvky matice A mají normální rozdělení z $N(0,1)$ či jemu podobné, potom aproximace dá přesné řešení skoro vždycky (ve statistickém smyslu).

Tento model se nazývá metodou LASSO (least absolute shrinkage and selection operator, Robert Tibshirani, 1996). Někdy se též formuluje ve tvaru

$$\min \ \|Ax-b\|_2 + \lambda\|x\|_1 \ \text{ za podm. } \ x \in \mathbb{R}^n,$$

v němž penalizujeme vektory s velkými a nenulovými hodnotami. Velikost penalizace je přímo úměrná zvolenému parametru $\lambda > 0$. □

Příklad 6.2 (Rekonstrukce signálu)**.** Uvažujme problém rekonstrukce signálu, viz příklad 2.3. Nechť vektor $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ značí neznámý signál, a nechť $y = \tilde{x} + \text{err}$ značí naměřený signál se šumem. Chceme zašuměný signál vychladit a tedy najít dobrou aproximaci $\tilde{x}$. Budeme tedy hledat takový vektor $x \in \mathbb{R}^n$, aby byl dost blízko y a zároveň aby byl odpovídající signál vyhlazený, tj. nedocházelo k velkým skokům mezi sousedními hodnotami.

To vede přirozeně na více-kriteriální úlohu

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ \|x-y\|_2, \ |x_{i+1}-x_i| \ \forall i.$$

Váženým součtem kritérií dostaneme skalarizaci

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ \gamma\|x-y\|_2 + \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1}-x_i|,$$

kde $\gamma > 0$ je daný parametr. Větší hodnota γ upřednostňuje první kriterium, tedy signál je blíže naměřenému, zatímco menší γ vede na vyhlazenější signál.

Zavedeme-li diferenční matici $D \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n}$ s prvky $D_{ii} = 1$, $D_{i,i+1} = -1$ a s nulami jinak, tak úloha lze přepsat jako

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ \gamma\|x-y\|_2 + \|Dx\|_1.$$

To lze opět nahlížet jako na aproximaci úlohy kardinality

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ \gamma\|x-y\|_2 + \|Dx\|_0,$$

v níž hledáme aproximaci signálu ve tvaru po částech konstantní funkce. Tento přístup se nazývá *total variation reconstruction*, a najde uplatnění hlavně u digitálních signálů.

Grafické porovnání je k dispozici na obrázku 6.1, který pochází z webových stránek:

`http://stanford.edu/class/ee364a/lectures/approx.pdf`

Podobný přístup se používá i pro analýzu a zpracování obrázků, pro problémy odstranění neostrostí a rozmazanosti, rekonstrukci poničených obrázků atp. Viz webové stránky

`http://www.imm.dtu.dk/~pcha/mxTV/` □

6.3 Rank minimization

Uvažujme problém minimalizace hodnosti neznámé positivně semidefinitní matice X za určitých podmínek

$$\min \ \mathrm{rank}(X) \ \text{ za podm. } \ X \succeq 0, \ X \in \mathcal{M}.$$

Tyto úlohy jsou NP-těžké i při lineárních omezeních. V zásadě zobecňují problém kardinality, protože $\|x\|_0 = \mathrm{rank}(\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_n))$. Ukážeme i přímou redukci z problému řešitelnosti celočíselného programu $Ax \le b, \ x \in \{0,1\}^n$. Tento problém lze jednoduše přepsat na

$$\min \ \mathrm{rank}(\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_n,1-x_1,\dots,1-x_n)) \ \text{ za podm. } \ Ax \le b.$$

Původní celočíselný program má řešení právě tehdy, když optimální hodnota je n.

Z důvodu výpočetní složitosti je vhodné úlohu aproximovat. Označme jako $\lambda(X) := (\lambda_1(X),\dots,\lambda_n(X))^T \ge 0$ vektor vlastních čísel positivně semidefinitní matice X. Potom $\mathrm{rank}(X) = \|\lambda(X)\|_0$, a tudíž je vhodnou aproximací nahradit hodnost hodnotou $\|\lambda(X)\|_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i(X) = \mathrm{tr}(X)$, což ve de na úlohu

$$\min \ \mathrm{tr}(X) \ \text{ za podm. } \ X \succeq 0, \ X \in \mathcal{M}.$$

Příklad 6.3 (Low rank aproximace)**.** Chceme nahradit positivně semidefinitní matici A blízkou maticí malé hodnosti. To může být užitečné při určitých typech komprese či regrese, nebo například když chceme extrahovat nějaký vzor z obrázku. Matematicky to můžeme vyjádřit jako model

$$\min \ \mathrm{rank}(X) \ \text{ za podm. } \ \|X - A\| \le \varepsilon, \ X \succeq 0,$$

a prakticky řešit jako

$$\min \ \mathrm{tr}(X) \ \text{ za podm. } \ \|X - A\| \le \varepsilon, \ X \succeq 0.$$

Toto je konvexní úloha a jde řešit efektivně. Speciálně, pokud za maticovou normu zvolíme maximovou (Čebyševovu) normu, pak má úloha vyjádření jako semidefinitní program

$$\min \ \mathrm{tr}(X) \ \text{ za podm. } \ X - A \le \varepsilon E, \ -X + A \le \varepsilon E, \ X \succeq 0,$$

kde $E = ee^T$ je matice samých jedniček.

Pokud za maticovou normu zvolíme spektrální normu, pak i původní problém lze řešit efektivně pomocí SVD rozkladu vynulováním nejmenších singulárních čísel. □

Příklad 6.4 (Kvadratické programování)**.** Uvažujme úlohu kvadratického programování s kvadratickými podmínkami (srov. sekce 2.1)

$$\min \ x^T C x + d^T x \ \text{ za podm. } \ x^T A_i x + b_i^T x \le c_i, \ i = 1,\dots,m,$$

kde $C, A_1,\dots,A_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou symetrické a ne nutně positivně semidefinitní matice. To dělá úlohu výpočetně náročnou (NP-těžkou). Na druhou stranu, takto lze formulovat celou řadu problémů.

Například úlohu Max-Cut nalezení maximálního řezu v grafu $G = (V, E)$ lze vyjádřit jako

$$\max \ \frac{1}{4} x^T L x \ \text{ za podm. } \ x_i^2 = 1, \ i = 1,\dots,n,$$

kde L je Laplaceova matice grafu definovaná takto: L_{ii} je stupeň vrcholu $i \in V$, $L_{ij} = -1$ pokud $\{i,j\} \in E$ a $L_{ij} = 0$ jinak. Potom vrcholy s $x_i = 1$ patří do jedné části řezu a vrcholy s $x_i = -1$ do druhé části. Pro každé $i \in V$ je pak

$$\sum_j L_{ij} x_i x_j = \deg(i) - \sum_{j:\{i,j\}\in E} x_i x_j = 2 \times \text{počet hran z } i \text{ do 2. části řezu.}$$

Proto $x^T L x$ dá čtyřnásobek řezu.

Zaveďme matici $X := xx^T \succeq 0$. Tato rovnost se dá ekvivalentně vyjádřit jako

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} X & x \\ x^T & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

To se nahlédne snadno: Pro $X := xx^T$ je zřejmě hodnost rozšířené matice 1. Naopak, pokud je hodnost matice 1, pak všechny sloupce jsou násobky posledního, speciálně (z posledního řádku) je první sloupec x_1-násobek posledního, atd. až předposlední sloupec je x_n-násobek posledního. Takže matice X má tvar $X = xx^T$.

Nyní hodnotu x^TCx lze vyjádřit jako $x^TCx = \operatorname{tr}(x^TCx) = \operatorname{tr}(Cxx^T) = \operatorname{tr}(CX)$, a původní úlohu lze ekvivalentně vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \min\ \operatorname{tr}(CX) + d^Tx \ \text{ za podm. }\ & \operatorname{tr}(A_iX) + b_i^Tx \le c_i,\ i = 1, \dots, m, \\ & \operatorname{rank}\begin{pmatrix} X & x \\ x^T & 1 \end{pmatrix} \le 1. \end{aligned}$$

Příslušná aproximace je potom dvou-kriteriální úloha

$$\begin{aligned} \min\ \operatorname{tr}(CX) + d^Tx,\ \operatorname{tr}(X) \ \text{ za podm. }\ & \operatorname{tr}(A_iX) + b_i^Tx \le c_i,\ i = 1, \dots, m, \\ & \begin{pmatrix} X & x \\ x^T & 1 \end{pmatrix} \succeq 0, \end{aligned}$$

což opět mohu řešit skalarizací

$$\begin{aligned} \min\ \operatorname{tr}(CX) + d^Tx + \gamma\operatorname{tr}(X) \ \text{ za podm. }\ & \operatorname{tr}(A_iX) + b_i^Tx \le c_i,\ i = 1, \dots, m, \\ & \begin{pmatrix} X & x \\ x^T & 1 \end{pmatrix} \succeq 0, \end{aligned}$$

kde $\gamma > 0$ je vhodný parametr. □

Více aplikací je k nahlédnutí například v Fazel [2002].

Obecný případ. Doposud jsme za neznámou matici uvažovali symetrickou positivně semidefinitní matici. Nyní uvažujme obecný případ nečtvercové matice $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\min\ \operatorname{rank}(X) \ \text{ za podm. }\ X \in \mathcal{M}.$$

O tom, že úloha je netriviální dosvědčuje i obrázek 6.2 ilustrující komplikovanou strukturu množiny matic dané hodnosti.

Vhodnou aproximací hodnosti je nukleární norma matice definovaná

$$\|X\|_* := \textstyle\sum_{i=1}^{\operatorname{rank}(X)} \sigma_i(X),$$

kde $\sigma_i(X) := \sqrt{\lambda_i(X^TX)}$ jsou singulární čísla matice X. Dá se ukázat Fazel [2002], že nukleární norma je konvexní obálka funkce hodnosti, tedy nejtěsnější dolní konvexní odhad $\operatorname{rank}(X)$.

Příklad 6.5 (Robustní PCA)**.** Úloha zní určit klíčovou podstatu dat, representovanou maticí $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Přístup robustní PCA (principal component analysis) je rozložit matici A na součet $A = L + S$, kde L má malou hodnost a S je řídká. Pak L representuje podstatnou část dat a S typicky chybná měření. Matematicky řešíme úlohu

$$\min_{L,S}\ \operatorname{rank}(L) + \gamma\|S\|_0 \ \text{ za podm. }\ A = L + S,$$

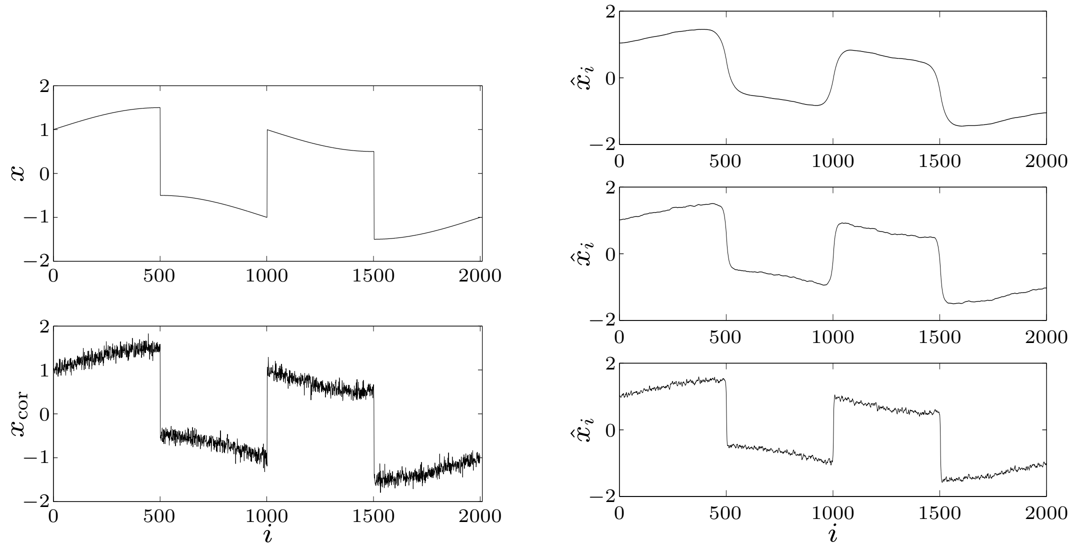
kde $\gamma > 0$ je parametr vážící důležitost obou členů. Hodnost matice L podle postupu nahoře nahradíme nukleární normou a kardinalitu matice S nahradíme součtovou normou $\|S\|_{\ell_1} := \sum_{i,j} |s_{ij}|$. Pak aproximovaná úloha má tvar

$$\min_{L,S}\ \|L\|_* + \gamma\|S\|_{\ell_1} \ \text{ za podm. }\ A = L + S.$$

Tato úloha již je úlohou konvexní optimalizace, neboť norma je konvexní funkcí. Dá se tudíž řešit poměrně efektivně.

Tato metoda se používá například pro rozpoznávání pozadí a popředí sekvence obrázků. Sloupce matice A odpovídají jednotlivým obrázkům. Matice L bude zhruba odpovídat pozadí, protože to se nepohybuje a matice tak má malou hodnost. Řídká matice S pak zachycuje popředí. $\square$

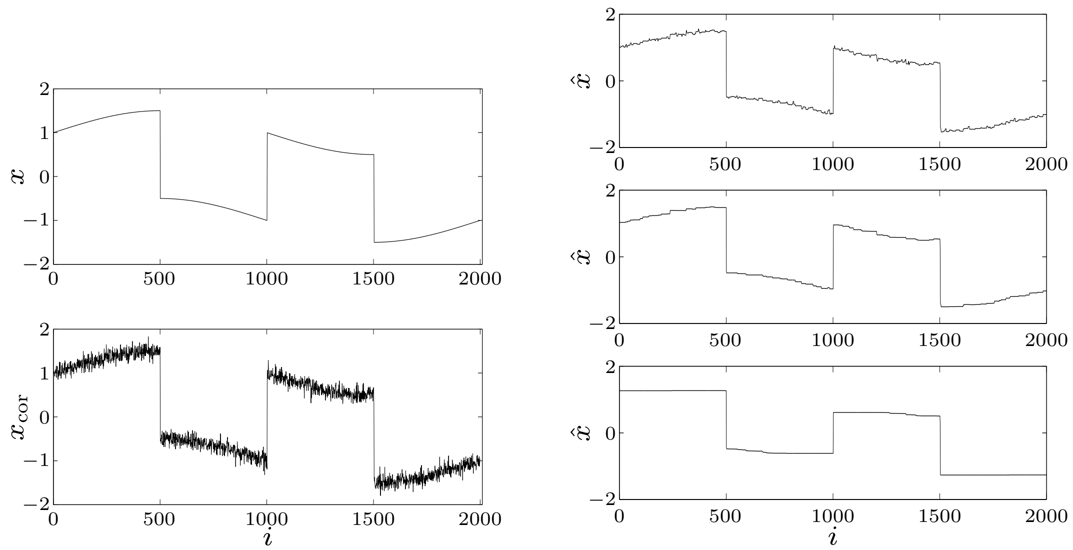
total variation reconstruction example



original signal x and noisy signal x_{cor}

three solutions on trade-off curve $\|\hat{x} - x_{\text{cor}}\|_2$ versus $\phi_{\text{quad}}(\hat{x})$

quadratic smoothing smooths out noise **and** sharp transitions in signal

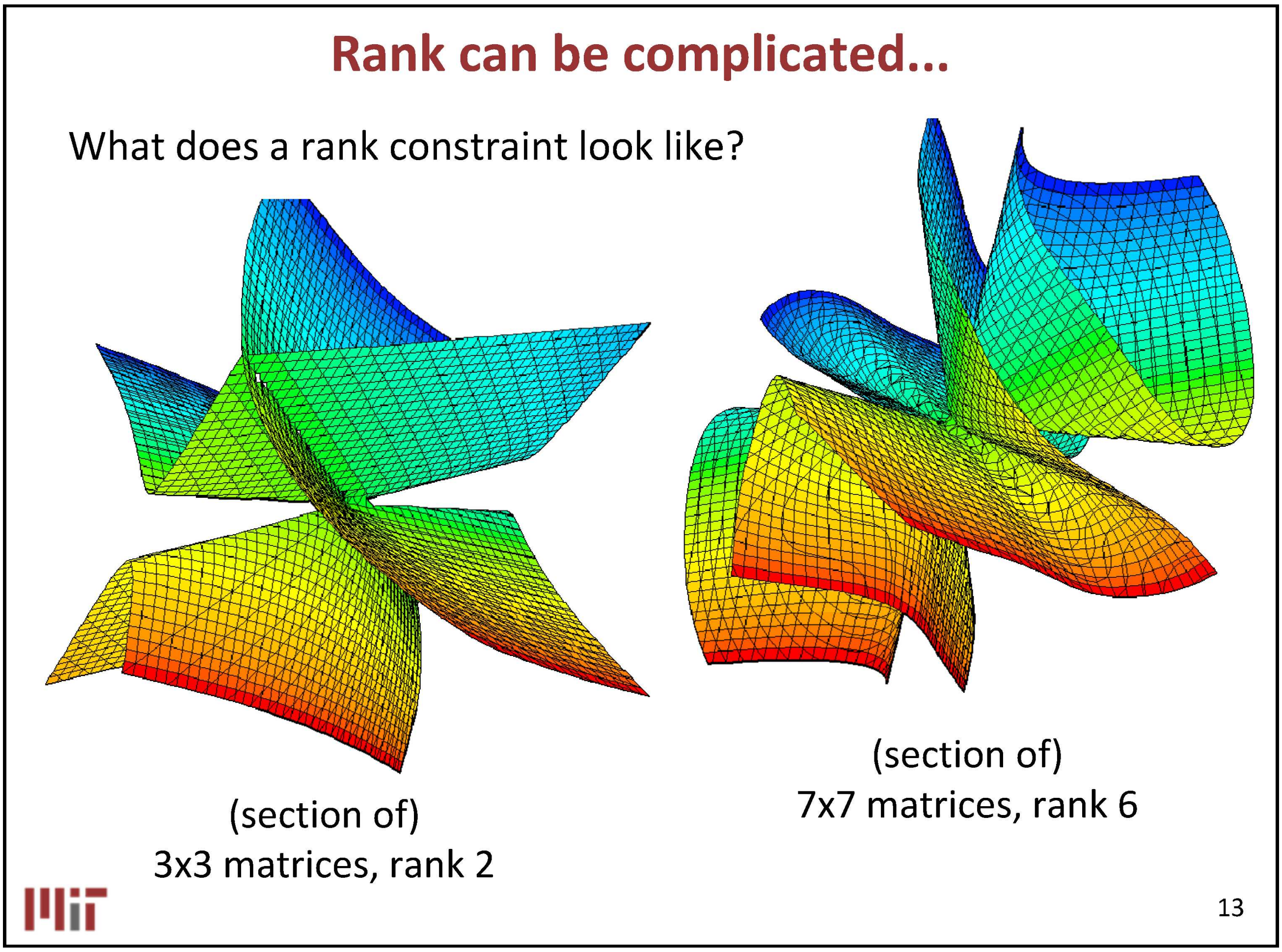


original signal x and noisy signal x_{cor}

three solutions on trade-off curve $\|\hat{x} - x_{\text{cor}}\|_2$ versus $\phi_{\text{tv}}(\hat{x})$

total variation smoothing preserves sharp transitions in signal

Obrázek 6.1: Příklad 6.2: U obou obrázků vlevo původní signál a dole se šumem. Napravo očištěný signál se zmenšující se vahou γ. V prvním obrázku nahoře použití kvadratického vyhlazování z příkladu 2.3, dole total variation reconstruction, která lépe aproximuje digitální signál.



Obrázek 6.2: Komplikovaná struktura množiny matic dané hodnosti. Zdroj `www.mit.edu/~parrilo/pubs/talkfiles/ISMP2009.pdf`

Kapitola 7

Problém lineární komplementarity

7.1 Základní vlastnosti

Problémem lineární komplementarity[1)] je úloha přípustnosti systému bez účelové funkce

$$y = Mz + q, \quad y, z \geq 0, \quad y^T z = 0, \tag{7.1}$$

kde $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $q \in \mathbb{R}^n$ jsou dané a $y, z \in \mathbb{R}^n$ jsou proměnné. Omezení jsou lineární až na podmínku $y^T z = 0$. Této podmínce se říká podmínka komplementarity, protože ekvivalentně říká, že pro každé i je $y_i = 0$ nebo $z_i = 0$.

Pozorování 7.1. *Je-li $q \geq 0$, pak (7.1) má řešení $y = q$, $z = 0$.*

S touto úlohou jsme se již seznámili v sekci 4.3 skrze KKT podmínky konvexního kvadratického programování. Konvexního kvadratického programování jde tedy zredukovat na problém lineární komplementarity, a v dřívějších dobách se tímto způsobem i řešilo. Naopak, úlohu (7.1) můžeme redukovat na kvadratické programování takto

$$\min \ z^T(Mz + q) \ \text{ za podm. } \ y = Mz + q, \quad y, z \geq 0. \tag{7.2}$$

Protože účelová funkce je nezáporná na přípustné množině, tato úloha má optimální hodnotu 0 právě tehdy, když (7.1) má řešení.

Problém lineární komplementarity je efektivně řešitelný pokud je například matice M positivně semidefinitní (což je případ KKT podmínek konvexního kvadratického programování). Obecně je ale úloha silně NP-těžká, což nahlédneme ekvivalencí s celočíselných programováním.

Ekvivalence s lineárním celočíselných programováním

Pro redukci (7.1) na celočíselné programování stačí přeformulovat podmínku komplementarity $y^T z = 0$. Tu rozepíšeme jako

$$y_i \leq \alpha b_i, \quad z_i \leq \alpha(1 - b_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

kde $\alpha > 0$ je dostatečně velké (jak velké, ale s polynomiální velikostí, viz Schrijver [1998]) a $b_i \in \{0, 1\}$ jsou binární proměnné.

Naopak, celočíselný program

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad x \in \{0, 1\}^n$$

lze přepsat na úlohu lineární komplementarity

$$Ax \leq b, \quad x, y \geq 0, \quad x^T y = 0, \quad x + y = e,$$

kterou není těžké převést do základního tvaru (7.1).

$$\begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix}, \quad y', y, x', x \geq 0, \quad y^T x'^T + y^T x = 0.$$

[1)] Název navrhnul Richard W. Cottle (*1934) roku 1965, kdy získal problém ústřední pozornost. Studuje se od 40. let 20. století, ale určitá pozorování jsou ale i staršího data.

Naivní algoritmus

Dekompozicí na 2^n podúloh. Buď $I \cup J = \{1, \dots, n\}$ disjunktní rozklad, kterýchžto je 2^n. Pro každý rozklad zafixujme $y_I := 0$ a $z_J := 0$, a soustava (7.1) má tvar lineární soustavy

$$0 = M_{I,I} z_I + q_I, \tag{7.3a}$$
$$y_J = M_{J,I} z_I + q_J, \tag{7.3b}$$
$$y_J, z_I \geq 0, \tag{7.3c}$$

kterou můžeme vyřešit lineárním programováním.

Bimaticové hry

Buďte $\{1, \dots, m\}$ strategie hráče I, $\{1, \dots, n\}$ strategie hráče II, a nechť $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jsou výplatní matice obou hráčů. Tedy při strategii (i, j) obou hráčů zaplatí hráč I částku a_{ij} a hráč II částku b_{ij}.

Nechť x je smíšená strategie hráče I, tedy pravděpodobností vektor nad čistými strategiemi. Tím je libovolný vektor $x \geq 0$, $e^T x = 1$. Podobně buď $y \geq 0$, $e^T y = 1$, smíšená strategie hráče II. Pak střední platba hráče I je $x^T A y$ a hráče II $x^T B y$.

Nashovo ekvilibrium je dvojice strategií $(\tilde{x}, \tilde{y})$ taková, že

$$\tilde{x}^T A \tilde{y} \leq x^T A \tilde{y} \quad \forall x \in X,$$
$$\tilde{x}^T B \tilde{y} \leq \tilde{x}^T B y \quad \forall y \in Y.$$

kde X a Y jsou množiny smíšených strategií. Žádnému hráči se tedy nevyplatí změnit strategii z této rovnováhy, protože by si tím pohoršit (resp. nepolepšil). V čistých strategiích Nashovo ekvilibrium existovat nemusí, ale ve smíšených vždy alespoň jedno existuje.

Bez újmy na obecnost předpokládejme $A, B \geq 0$, čehož jde dosáhnout posunem $A := A + \alpha e e^T$, $B := B + \alpha e e^T$ pro dost velké $\alpha > 0$.

Vektor $\tilde{x}$ je tedy optimem lineárního programu $\min_{x \in X} (A\tilde{y})^T x$, nebo ekvivalentně pomocí podmínek optimality existuje u takové, že

$$eu \leq A\tilde{y}, \quad \tilde{x}^T (A\tilde{y} - eu) = 0.$$

Analogicky pro $\tilde{y}$ existuje v takové, že

$$ev \leq B^T \tilde{x}, \quad \tilde{y}^T (B^T \tilde{x} - ev) = 0.$$

To nám tedy ná vá nutné a postačující podmínky pro to, aby $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ bylo ekvilibrium. Tuto podmínky představují problém lineární komplementarity a není těžké je přepsat do základního tvaru (7.1).

7.2 Řešitelnost, jednoznačnost a P-matice

Zajímá nás za jakých podmínek je problém lineární komplementarity řešitelný, kdy má konečně mnoho řešení a kdy jednoznačné řešení. kdy je množina řešení konvexní, omezená atp. Je zajímavé, že každá tato vlastnost vede na určitou třídu matic, které jsou jistým způsobem provázané a mají určité společné rysy v jejich charakterizaci. Z časoprostorových důvodů stihneme jen P-matice a jim podobné.

Připomeňme, že hlavní podmatice vznikne odstraněním určitého počtu řádků a sloupců stejně indexovaných. Celkem tedy matice $n \times n$ má $2^n - 1$ hlavních podmatic.

Věta 7.2. *Problém lineární komplementarity má konečně mnoho řešení pro každé $q \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když jsou determinanty všech hlavních podmatic M nenulové. V případě konečně mnoha řešení jich je nanejvýš 2^n.*

Důkaz. Jako v naivním algoritmu nahoře rozdělíme problém na 2^n podúloh. Buď $I \cup J = \{1, \dots, n\}$ disjunktní rozklad, kterýchžto je 2^n. Pro každý rozklad zafixujme $y_I := 0$ a $z_J := 0$, a soustava (7.1) má tvar (7.3), neboli

$$0 = M_{I,I} z_I + q_I, \tag{7.4a}$$

$$0 \le M_{J,I} z_I + q_J, \tag{7.4b}$$

$$z_I \ge 0. \tag{7.4c}$$

„$\Leftarrow$“ Z předpokladu je $M_{I,I}$ regulární, tedy rovnice (7.4a) má jedině řešení, které může a nemusí splňovat ostatní omezení.

„$\Rightarrow$“ Je-li $M_{I,I}$ singulární, pak rovnice $0 = M_{I,I} z_I$ popisuje alespoň přímku a vhodnou volbou q_I dosáhneme toho, že protíná nezáporný ortant. Pro dost velké $q_J > 0$ pak část této přímky zůstane řešením, tedy řešení je nekonečně mnoho. □

Příklad 7.3. Hodnota 2^n pro počet řešení se nabyde například pro úlohu

$$y = -z + e, \quad y, z \ge 0, \quad y^T z = 0.$$

Všechna řešení jsou tvaru $z \in \{\pm 1\}^n$ a $y = e - z$. □

Jednoznačnost řešení vede na pojem P-matice.

Definice 7.4. Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se nazývá *P-maticí*, pokud jsou determinanty všech hlavních podmatic kladné.

Příklad 7.5. Matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ je P-matice, ale $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 5 \\ 0.5 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ není. □

Pozorování 7.6. *Symetrická matice je P-maticí právě tehdy, když je positivně definitní.*

Důkaz. Symetrická matice je positivně definitní právě tehdy, když jsou determinanty všech hlavních podmatic kladné, což je totéž jako P-maticovost. □

Užitečná ač ryze teoretická charakterizace P-matic je následující.

Věta 7.7 (Fiedler and Pták, 1962)**.** *Matice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je P-maticí právě tehdy, když pro každé $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existuje $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $x_i (Mx)_i > 0$.*

Nyní přijde na řadu ústřední věta o vztahu P-matic a problému lineární komplementarity.

Věta 7.8 (Samelson et al., 1958; Ingleton, 1966; Murty, 1972)**.** *Problém lineární komplementarity má jednoznačné řešení pro každé $q \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když M je P-matice.*

Důkaz. (Idea důkazu.)

„$\Rightarrow$“ Pokud M není P-matice, pak podle věty 7.7 existuje nenulový vektor x takový, že $x_i (Mx)_i \le 0$ pro všechna i. Definujme vektory z, y jako po složkách kladné části $z := x^+$ a $y := (Mx)^+$, a definujme pravou stranu $q := y - Mz$. Pak z, y řeší (7.1) a stejně tak řeší úlohu i vektory záporných částí $z' := x^-$ a $y' := (Mx)^-$. Tudíž (7.1) nemá jednoznačné řešení.

„$\Leftarrow$“ Předpokládejme nyní, že M je P-maticí. Dá se ukázat s větším úsilím, že (7.1) je řešitelná. Existuje teoretický důkaz, nebo i důkaz ukazující, že pro P-matice konverguje Murtyho algoritmus, který řeší úlohu (7.1) simplexovou metodou s tím, že v bázi nejsou nikdy zároveň komplementární proměnné z_i a y_i.

Jednoznačnost nahlédneme sporem. Nechť (z, y) a (z', y') jsou dvě řešení. Pak $y - y' = M(z - z')$, a rozborem čtyř případů z podmínek komplementarity pak pro každé i je $(z_i - z'_i)(y_i - y'_i) \le 0$. Tudíž

$$(z - z')_i (M(z - z'))_i = (z - z')_i (y - y')_i \le 0 \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

což je ve sporu s P-maticovostí M podle věty 7.7.

Poznámka: Jednoznačnost řešení pro positivně definitní M. Je-li M positivně definitní, pak úloha (7.2) je ryze konvexním programem, a proto má maximálně jedno optimální řešení. □

Řešení $y(q), z(q)$ (7.1) jako funkce pravé strany q je tedy dobře definovaná funkce pokud M je P-matice. Dá se navíc ukázat, že $y(q), z(q)$ je spojitá funkce, dokonce globálně lipschitzovská [Cottle et al., 2009], a navíc po částech lineární.

Věta 7.9. *Řešení (7.1) jako funkce pravé strany q je po částech lineární funkce.*

Důkaz. Opět dekompozicí na 2^n podúloh. Pokud pro dané I, J má rovnice (7.3a) řešení, vyhovující ostatním omezením v (7.3), pak řešení je lineární vůči q. Navíc množina těch I, J, kdy (7.3a) zůstane řešitelnou, je uzavřená, tedy není problém s nespojitým přechodem k jinému I', J' při změně q, neboť ve fázi změny mají řešení obě podúlohy. □

Pro positivně (semi)-definitní matice jsou známy silnější výsledky.

Věta 7.10. *Buď M positivně semi-definitní.*

(1) Je-li (7.1) řešitelné bez podmínek komplementarity, pak je řešitelné i s nimi.

(2) Množina řešení (7.1) je konvexní polyedr.

Jak jsme ukázali, důležitá podtřída P-matic jsou positivně definitní matice. Jaké ještě jiné zajímavé matice jsou P-maticemi?

Uvažujme *diagonálně dominantní* matici M s kladnou diagonálou, tj.

$$m_{ii} > \sum_{j\neq i} |m_{ij}|, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Snadno nahlédneme, že tyto matice jsou P-maticemi. Díky větě o Gerschgorinových discích jsou všechna vlastní čísla matice M v kladné polorovině komplexní roviny, a proto $\det(M) > 0$. Ze stejného důvodu jsou kladné i determinanty hlavních podmatic.

Můžeme tuto třídu ještě rozšířit? Nejprve nahlédneme, že P-maticovost je invariantní vůči přenásobení řádků a sloupců kladným číslem

Pozorování 7.11. *Buďte D, D' diagonální matice s kladnou diagonálou. Pak matice M je P-maticí právě tehdy, když DMD' je P-maticí.*

Důkaz. Násobení řádku či sloupce kladným číslem nezmění znaménko determinantu. □

Toto pozorování nám umožňuje rozšířit diagonálně dominantní matice na větší podtřídu P-matic. Platí totiž, že M je P-matice, pokud existuje vektor $d > 0$ takový, že

$$m_{ii}d_i > \sum_{j\neq i} |m_{ij}|d_j, \quad \forall i = 1, \dots, n. \tag{7.5}$$

Takováto matice se nazývá H-matice s kladnou diagonálou. Testovat, zda daná matice M splňuje tuto podmínku je jednoduché. Prvním nápadem by mohlo být najít $d > 0$ vhodným lineárním programem, ale jsou známy efektivnější způsoby. Stačí uvažovat tzv. porovnávací matici $\tilde{M}$ definovanou

$$\tilde{m}_{ij} = \begin{cases} m_{ij} & \text{pokud } i = j, \\ -|m_{ij}| & \text{jinak,} \end{cases}$$

která je s původní ekvivalentní co do splnitelnosti vlastnosti (7.5). Nyní stačí ověřit, že $\tilde{M}$ je M-matice, čili že splňuje $\tilde{M}^{-1} \geq 0$, nebo ekvivalentně že reálná vlastní čísla $\tilde{M}$ jsou kladná.

Věta 7.12 (Coxson, 1994). *Testování, zda daná matice je P-maticí je co-NP-úplný problém.*

Důkaz. Viz Coxson [1994]; Rohn [1996]. Idea je založena na transformaci testování singularity intervalové matice řádu n na P-maticovost reálné matice řádu n^2. □

Z věty 7.8 víme, že pro P-matice má problém lineární komplementarity jednoznačné řešení pro libovolnou pravou stranu. Implikuje to ale efektivní algoritmus? Pro positivně semidefinitní matice je úloha (7.1) polynomiálně řešitelná, ale pro obecné P-matice je to otevřený problém. Existují však důvody pro to se domnívat, že i pro jakoukoli P-matici je stále problém polynomiální.[2)]

[2)] Viz Lukas Schiesser, P- & SU - LCP may not be hard, 2015.

Další čtení. Knihy Cottle et al. [2009]; Murty [1988] nebo český učební text Rohn [1997].

7.3 Absolute value equation

Soustava $Ax = b$ je notoricky známá, ale zde budeme řešit trochu obecnější soustavu s absolutní hodnotou (poprvé zkoumal detailně Rohn [2004])

$$Ax - B|x| = b, \tag{7.6}$$

kde $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a $b \in \mathbb{R}^n$. Narozdíl od klasické soustavy lineárních rovnic tato soustava může mít několik ale konečně mnoho řešení. Nejvíce (ale konečně mnoho) jich může být 2^n, což se nabyde např. pro soustavu $|x| = e$, která má za množinu řešení $\{\pm 1\}^n$. Více jich být nemůže, protože pokud uvažujeme řešení odpovídající znaménkovému vektoru $s \in \{\pm 1\}^n$, tj. $\operatorname{sgn}(x) = z$, pak množina řešení je konvexní polyedr popsaný

$$Ax - \operatorname{diag}(z)x = b, \quad \operatorname{diag}(z)x \geq 0.$$

Ten může být prázdný, jednobodový nebo se skládá z nekonečně mnoha bodů. Otázkou je, jestli každá hodnota mezi $1, \dots, 2^n$ se nabyde jako počet řešení nějaké soustavy?

Ekvivalence s problémem lineární komplementarity

Věta 7.13 (Mangasarian and Meyer, 2006; Mangasarian, 2007; Rohn, 2012). *Úloha soustavy s absolutní hodnotou (7.6) je ekvivalentní s úlohou lineární komplementarity (7.1).*

Důkaz. Uvažujme úlohu lineární komplementarity (7.1)

$$y = Mz + q, \quad y, z \geq 0, \quad y^T z = 0. \tag{7.7}$$

Ukážeme, ze je ekvivalentní se soustavou

$$(I + M)x + (I - M)|x| = 2q \tag{7.8}$$

pomocí substituce $y \equiv x^+$, $z \equiv x^-$, kde $x^+ = \max(x, 0)$, $x^- = \max(-x, 0)$ je kladná a záporná část x po složkách. Touto substitucí a dosazením $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$ snadno převedeme řešení soustavy (7.8) nad soustavu (7.7). Podobně naopak, je-li y, z řešení (7.7), pak $x := y - z$ řeší (7.8).

Uvažujme naopak úlohu $Ax - |x| = b$. Vektor x vyjádříme opět jako $x = x^+ - x^-$. Úloha přepíšeme na ekvivalentní tvar

$$A(x^+ - x^-) - (x^+ + x^-) = b, \quad x^+, x^- \geq 0, \quad (x^+)^T x^- = 0,$$

neboli

$$(A - I)x^+ - (A + I)x^- = b, \quad x^+, x^- \geq 0, \quad (x^+)^T x^- = 0,$$

To je úloha lineární komplementarity. Do základního tvaru lze snadno převést pokud matice $A - I$ (nebo $A + I$) je regulární, tedy pokud matice A nemá vlastní číslo 1. Toho lze dosáhnout snadno přeškálováním původní soustavy a proměnných. □

Ze zvýše zmíněné ekvivalence vyplývá, že řešit soustavy s absolutní hodnotou je NP-těžké. Předvedeme ale přímý důkaz.

Věta 7.14 (Mangasarian and Meyer, 2006; Mangasarian, 2007). *Testování řešitelnosti soustavy (7.6) je NP-těžké.*

Důkaz. Uvažujme NP-těžkou úlohu Set-Partitioning: Lze množinu daných čísel $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ rozdělit do dvou skupin se stejným součtem? Ekvivalentně vyjádřeno, existuje $x \in \{\pm 1\}^n$ tak, že $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$? Jinými slovy, ptáme se po řešitelnosti soustavy a absolutní hodnotou

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0, \quad |x| = e.$$

Aby soustava odpovídala základnímu tvaru (7.6), přidáme navíc proměnnou x_{n+1}

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + 0x_{n+1} = 0, \quad |x_i| = 1, \ i = 1, \dots, n. \qquad \square$$

Jednoduchou úpravou důkazu lze ukázat, že NP-těžké je i rozhodování zda řešitelná soustava má jediné řešení nebo jich je víc [Prokopyev, 2009].

Jednoznačnost, existence

Následující podmínka je postačující pro existenci a jednoznačnost řešení. Používáme eukleidovskou normu pro vektory, čemuž odpovídá spektrální norma pro matice.

Věta 7.15. *Jestliže $\|B\| < 1$, pak soustava $x - B|x| = b$ má právě jedno řešení pro každé $b \in \mathbb{R}^n$.*

Důkaz. „Jednoznačnost.“ Nechť x, y jsou dvě různá řešení soustavy. Pak

$$\|x - y\| = \|B|x| - B|y|\| \le \|B\| \cdot \||x| - |y|\| < \|x - y\|,$$

spor.

„Existence.“ Uvažujme posloupnost x_k, $k = 1, \dots,$ kde $x_{k+1} = B|x_k| + b$ a x_1 je libovolné. Vzdálenost dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti odhadneme podobně jako nahoře jako

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|B|x_k| + b - B|x_{k-1}| - b\| \le \|B\| \cdot \||x_k| - |x_{k-1}|\| \le \|B\| \cdot \|x_k - x_{k-1}\|.$$

Jelikož vzdálenost klesá geometrickou řadou, je posloupnost Cauchyovská a tedy konvergentní. Limita pak nutně splňuje $x = B|x| + b$, tedy je hledaným řešením. $\square$

Zde je dobré si uvědomit, že podmínka $\|B\| < 1$ ještě nezaručuje $\operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(b)$ a tím pádem znalost znaménka řešení. Jako příklad uvažujme soustavu

$$x - \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |x| = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Jednoznačné řešení je $x = (1, 4)$, jehož znaménka se neshodují se znaménky b.

Existence 2^n řešení. Uvažujme nyní soustavu

$$Ax - |x| = b.$$

Pokud $A = 0$ a $b < 0$, bude mít soustava 2^n řešení. Existence 2^n řešení bude tedy zaručena i pro $b < 0$ a „dost“ malou matici A. Formálně, pro každé $s \in \{\pm 1\}^n$ chceme, aby soustava $(A - \operatorname{diag}(s))x = b$ měla jediné řešení splňující $\operatorname{sgn}(x) = s$. Pro existenci řešení stačí, aby matice $A - \operatorname{diag}(s)$, nebo po přenásobením matice $I - \operatorname{diag}(s)A$, byly regulární. Zapouzdříme matice do intervalové matice $I - \operatorname{diag}(s)A \in [I - |A|, I + |A|]$. Tato intervalová matice je regulární právě tehdy, když $\rho(|A|) < 1$. Tato podmínka tedy říká, jak „malá“ musí matice A být. Ještě ale zbývá zpracovat podmínku, aby řešení soustavy $(A - \operatorname{diag}(s))x = b$ leželo v ortantu $\operatorname{diag}(s)x \ge 0$. K tomu opět poslouží relaxace na intervalovou matici a použití obálek na zapouzdření množiny řešení. Podmínka, aby obálky náležely do příslušných ortantů pak dává zbývající omezení. Více viz Hladík [2018].

Odhady

Soustava (7.6) je jednoduše řešitelná pokud známe znaménko řešení $s = \operatorname{sgn}(x)$. Pak $|x| = \operatorname{diag}(s)x$ a problém se redukuje na obyčejnou soustavu lineárních rovnic $(A - B \operatorname{diag}(s))x = b$. Pokud znaménko neznáme, můžeme enumerovat všech 2^n možností, což je ale výpočetně náročné. Existuje celá řada metod, které fungují sofistikovaněji a nejsou apriori exponenciální. My se zde spíš zaměříme na aproximaci a ukážeme několik odhadů z [Hladík, 2018]. Ty mohou být z praktického hlediska velmi užitečné. Pokud je odhad tak těsný, že určuje znaménka (všech nebo aspoň velké části) složek řešení, pak se problém opět redukuje na to vyřešit (jednu či několik) soustav lineárních rovnic. Ve finále lze tedy odhady použít i jako postačující podmínku na jednoznačnost či neexistenci řešení. Odhad navíc může sloužit dobře i pro relativně velké n, podstatné je pouze, aby hodnota $\rho(|B|)$ byla malá.

Tvrzení 7.16. *Je-li $\rho(|B|) < 1$, pak řešení soustavy $x - B|x| = b$ splňuje*

$$|x - b| \leq (I - |B|)^{-1}|B||b|. \tag{7.9}$$

Důkaz. Odhadneme

$$|x - b| \leq |B||x| \leq |B||x - b| + |B||b|,$$

z čehož

$$(I - |B|)|x - b| \leq |B||b|.$$

Protože $\rho(|B|) < 1$, matice $(I - |B|)$ je regulární a má nezápornou inverzi díky větě o Neumannových řadách: $(I - |B|)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} |B|^k \geq 0$. Tudíž přenásobení nerovnosti maticí $(I - |B|)^{-1} \geq 0$ je oprávněné a dává (7.9). □

Polyedrální odhad. Těsnější, ale trochu výpočetně náročnější odhad, aproximaci můžeme získat pomocí polyedrické obálky. Uvažujme obecnou soustavu $Ax - B|x| = b$ a nechť známe (např. z jiných odhadů) mez u takovou, že $|x| \leq u$ pro všechna řešení x. Rozdělíme matici B na kladnou a zápornou část $B = B^+ + B^-$. Soustava má nyní tvar

$$Ax - b + B^-|x| = B^+|x|.$$

Přepíšeme rovnost na dvě obrácené nerovnosti. Nerovnici $Ax - b + B^-|x| \leq B^+|x|$ relaxujeme na

$$Ax - b + B^-y \leq B^+u, \quad \pm x \leq y,$$

a opačnou nerovnici $Ax - b + B^-|x| \geq B^+|x|$ relaxujeme na

$$Ax - b + B^-u \geq B^+y, \quad \pm x \leq y.$$

Celkový polyedrální odhad pak má popis

$$Ax + B^-y \leq b + B^+u, \quad -Ax + B^+y \leq -b + B^-u, \quad \pm x - y \leq 0.$$

Podle numerických výpočtů [Hladík, 2018] je odhad v některých případech výrazně lepší než (7.9).

Značení

Množiny a čísla

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$	množina přirozených, celých, racionálních a reálných čísel
$\mathbb{R}^{m\times n}$	prostor reálných matic řádu $m \times n$
$\mathbb{R}^n$	prostor reálných vektorů rozměru n
$\mathbb{R}^n_+$	nezáporný ortant, $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x \geq 0\}$
$\mathrm{conv}(M)$	konvexní obal množiny M
$\mathrm{int}(M)$	topologický vnitřek množiny M
$\mathrm{ri}(M)$	relativní vnitřek množiny M, tj. vnitřek po restrikci na nejmenší afinní podprostor obsahující M
$\mathrm{cl}(M)$	uzávěr množiny M
$\mathcal{O}_\varepsilon(x^*)$	ε-okolí bodu x^*, tj. $\mathcal{O}_\varepsilon(x^*) = \{y;\ \|x^* - y\| < \varepsilon\}$
r^+	kladná část reálného čísla, $r^+ = \max(r, 0)$
r^-	záporná část reálného čísla, $r^- = \max(-r, 0)$
$\lceil x \rceil$	horní celá část reálného čísla x
$\mathrm{sgn}(x)$	znaménko reálného čísla x, ($\mathrm{sgn}(x) = 1$ pro $x > 0$, $\mathrm{sgn}(x) = -1$ pro $x < 0$ a $\mathrm{sgn}(x) = 0$ pro $x = 0$)

Matice a vektory

$\mathrm{rank}(A)$	hodnost matice A
$\mathrm{tr}(A)$	stopa matice A, $(A) = \sum_i a_{ii}$
A^T	transpozice matice A
$A \geq B$	nezápornost matice $A - B$, tj. $a_{ij} \geq b_{ij}$
$A > B$	kladnost matice $A - B$, tj. $a_{ij} > b_{ij}$
$A \succeq 0$	matice A je positivně semidefinitní
$A \succeq B$	matice $A - B$ je positivně semidefinitní
$A \succ B$	matice $A - B$ je positivně definitní
$\lambda_{\min}(A)$	nejmenší vlastní číslo symetrické matice A
0_n, 0	nulová matice (všechny složky jsou rovny 0)
I_n, I	jednotková matice (diagonální s jedničkami na diagonále)
e_i	jednotkový vektor, $e_i = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0)^T$
e	vektor ze samých jedniček, $e = (1, \ldots, 1)^T$
$\|A\|$	norma matice A
$\|x\|_p$	ℓ_p-norma vektoru $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n \lvert x\rvert_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$
$\|x\|_2$	eukleidovská norma vektoru $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Další

$\nabla f(x)$	gradient funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tj. $\nabla f(x) = (\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n})^T$
$\nabla g(x)$	Jakobián funkce $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tj. matice řádu $n \times m$, jejíž sloupce jsou tvořeny postupně gradienty $\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_m(x)$; Jakobián má tedy na pozici (i,j) hodnotu $\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}$
$\nabla^2 f(x)$	Hessián funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, což je vlastně Jakobián gradientu funkce $g(x)$; Hessián má tedy na pozici (i,j) hodnotu $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$

Literatura

M. Avriel, W. E. Diewert, S. Schaible, and I. Zang. *Generalized concavity*, volume 36 of *Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering*. Plenum Press, New York, 1988. 13

M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty. *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms. 3rd ed.* John Wiley & Sons., NJ, 2006. 3, 13

S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004. 3, 11, 33

S. Boyd, S.-J. Kim, L. Vandenberghe, and A. Hassibi. A tutorial on geometric programming. *Optim. Eng.*, 8(1):67, 2007. 11

C. J. Burges. A tutorial on support vector machines for pattern recognition. *Data Min. Knowl. Discov.*, 2(2):121–167, 1998. 37

A. Charnes and W. W. Cooper. Programming with linear fractional functionals. *Naval Res. Logist. Quart.*, 9(3-4):181–186, 1962. 17

R. W. Cottle, J.-S. Pang, and R. E. Stone. *The Linear Complementarity Problem*. SIAM, 2009. 27, 56, 57

G. E. Coxson. The P-matrix problem is co-NP-complete. *Math. Program.*, 64(1):173–178, 1994. 56

M. Fazel. *Matrix Rank Minimization with Applications*. PhD thesis, Elec. Eng. Dept, Stanford University, March 2002.
`https://faculty.washington.edu/mfazel/thesis-final.pdf`. 48

M. Fiedler and V. Pták. On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors. *Czech. Math. J.*, 12(3):382–400, 1962. 55

M. Fiedler, J. Nedoma, J. Ramík, J. Rohn, and K. Zimmermann. *Linear Optimization Problems with Inexact Data*. Springer, New York, 2006. 21

C. A. Floudas and P. M. Pardalos, editors. *Encyclopedia of Optimization. 2nd ed.* Springer, New York, 2009. 9

R. W. Freund and F. Jarre. An interior-point method for multifractional programs with convex constraints. *J. Optim. Theory Appl.*, 85(1):125–161, 1995. 18

M. Hladík. Bounds for the solutions of absolute value equations. *Comput. Optim. Appl.*, 69(1):243–266, 2018. 58, 59

A. W. Ingleton. A problem in linear inequalities. *Proc. Lond. Math. Soc. (s3)*, 16(1):519–536, 1966. 55

O. L. Mangasarian. Absolute value programming. *Comput. Optim. Appl.*, 36(1):43–53, 2007. 57

O. L. Mangasarian and R. R. Meyer. Absolute value equations. *Linear Algebra Appl.*, 419(2):359–367, 2006. 57

K. G. Murty. On the number of solutions to the complementarity problem and spanning properties of complementary cones. *Linear Algebra Appl.*, 5:65–108, 1972. 55

K. G. Murty. *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming.* Heldermann Verlag, Berlin, 1988. Internet edition from 1997. 27, 57

Y. Nesterov and A. Nemirovskii. *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming.* SIAM, Philadelphia, 1994. 11, 12

Y. E. Nesterov and A. S. Nemirovskii. An interior-point method for generalized linear-fractional programming. *Math. Program.*, 69(1B):177–204, 1995. 18

P. M. Pardalos and S. A. Vavasis. Quadratic programming with one negative eigenvalue is NP-hard. *J. Glob. Optim.*, 1(1):15–22, 1991. 9

G. Pataki. Characterizing bad semidefinite programs: Normal forms and short proofs. *SIAM Rev.*, 61(4): 839–859, 2019. 41

O. A. Prokopyev. On equivalent reformulations for absolute value equations. *Comput. Optim. Appl.*, 44 (3):363–372, 2009. 58

J. Rohn. Checking properties of interval matrices. Technical Report 686, Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, 1996. `https://hdl.handle.net/11104/0123221`. 56

J. Rohn. Lineární a nelineární programování (Učební text). `https://kam.mff.cuni.cz/~hladik/doc/Rohn-LP_NLP-1997.pdf`, 1997. 27, 57

J. Rohn. A theorem of the alternatives for the equation $Ax + B|x| = b$. *Linear Multilinear Algebra*, 52(6): 421–426, 2004. 57

J. Rohn. An algorithm for computing all solutions of an absolute value equation. *Optim. Lett.*, 6(5): 851–856, 2012. 57

H. Samelson, R. M. Thrall, and O. Wesler. A partition theorem for euclidean n-spaces. *Proc. Am. Math. Soc.*, 9:805–807, 1958. 55

A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming. Repr.* Wiley, Chichester, 1998. 53

S. A. Vavasis. *Nonlinear Optimization: Complexity Issues.* Oxford University Press, New York, 1991. 9