

POKRÝVÁNÍ GRAFŮ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

OBOR: INFORMATIKA

MATEMATICKO–FYZIKÁLNÍ FAKULTA

UNIVERZITY KARLOVY V PRAZE

Jiří Fiala

Prosinec 1996

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.

Matematicko–fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze

Katedra aplikované matematiky

Poděkování

Děkuji panu docentu Kratochvílovi za zajímavé téma, jež se mi stalo zdrojem radosti z poznávání na více než dva roky studia, a za mnoho rad a námětů, které byly zvláště cenné ve chvílích, kdy jsem v nejistém světě otevřených problémů ztrácel pevnou půdu pod nohama.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a použil pouze uvedenou literaturu. Souhlasím se zapůjčováním diplomové práce.

Obsah

Poděkování	ii
Prohlášení	iii
1. Úvod	1
1.1 Motivace a obsah práce	1
1.2 Členění práce	2
2. Definice a značení	4
2.1 Grafy, zobrazení a matice	4
2.2 Pokrytí a částečné pokrytí	8
3. Vlastnosti pokrytí	11
3.1 Barevnost	11
3.2 Surjektivita pokrytí	12
3.3 Zúžení pokrytí	12
3.4 Souvislost pokrývacích grafů	15

4. Aplikace lineární algebry	20
4.1 Stupňové rozdělení	20
4.2 Vlastní čísla	26
5. Společné pokrytí	30
6. Částečné pokrytí a solidní grafy	38
6.1 Částečné pokrytí	38
6.2 Rozpuštění vrcholu	40
6.3 Solidní a samosolidní grafy	44
6.4 Věta o solidních regulárních grafech	47
7. Závěr	59
Literatura	61

Seznam obrázků

0. Příklad pokrytí grafu H grafem G	9
0. Záměna hran	14
0. Pokrývání dvousouvislým grafem	17
0. Protipříklad při pokrývání dvousouvislým grafem	18
0. Ukázka tříregulárního strnulého grafu	25
0. Protipříklad grafů s vlastností $R_G = A_H$	26
0. Ukázka konstrukce grafu G	35
0. Rozpuštění vrcholu u v grafu G	41
0. Ukázka nerozšiřitelného pokrytí na souvislém 3-regulárním grafu ..	43
0. Nesamosolidní graf s minimálním stupněm vrcholu rovným k	45
0. Ukázka nesamosolidního grafu	46
0. Užití lemmatu 6.15	47
0. Případy rozdělení grafu H''	53
0. Grafy H_4 , G_4 a G_{u_4}	57
0. Graf E pro $k = 8$	58

Kapitola 1

Úvod

1.1 Motivace a obsah práce

Práce se zabývá problematikou pokrytí grafů (graph coverings), neboli grafových homomorfismů, jež zachovávají stupně vrcholů a rozdílnost sousedů vrcholu.

Jednou z prvních aplikací pokrytí grafů je konstrukce nekonečně mnoha tří-regulárních grafů, jejichž grupa automorfismů je tranzitivní na cestách délky pět. Uvedená konstrukce je popsána v monografii [1].

Další použití pokrývání grafů je v oblasti zkoumání projektivně rovinných grafů. Tato třída grafů je podtřídou grafů, u nichž existuje pokrytí rovinným grafem, navíc je známo, že pro tuto třídu existuje konečně mnoho zakázaných minorů. Byla vyslovena hypotéza, že tyto dvě třídy jsou shodné, neboli každý graf, jež pokrývá nějaký rovinný graf, je zároveň projektivně rovinný.

Kromě těchto aplikací pokrytí byla formulována úloha *H-COVER*, jejímž

vstupem je graf G a výstupem odpověď na otázku: "Existuje pokrytí grafu H grafem G ?"

V článku [2] je dokázáno, že pro k -regulární hranově $\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$ -souvislé a pro k -regulární hranově k -barevné grafy H patří problém H -COVER do třídy NP-úplných úloh. Při důkazu těchto vět bylo použito nových pojmů, a to *částečného pokrytí*, *rozpuštění vrcholu v grafu* a *solidního grafu*. Jedním z důsledků důkazu je fakt, že pro $k > 2$ je třída k -regulárních solidních grafů podtřídou třídy grafů, pro něž je problém H -COVER NP-úplný.

Tato práce se ve své první polovině zabývá vlastnostmi grafů, které se navzájem pokrývají. Druhá polovina je věnována vlastnostem částečného pokrytí a především hranové souvislosti solidních grafů.

K hlavním výsledkům této práce patří důkaz solidnosti hranově $\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$ -souvislých k -regulárních grafů spolu s ukázkou adekvátnosti požadavku $\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$ -souvislosti pro k dělitelné čtyřmi. Tím je problém hranové souvislosti solidních grafů pro uvedenou třídu grafů vyřešen.

V práci je poprvé v kontextu pokrytí předveden důkaz věty, že za předpokladu existence úplného pokrytí mezi dvěma obecnými grafy je každé částečné pokrytí zároveň úplným pokrytím.

1.2 Členění práce

Práce je členěna do sedmi kapitol.

V druhé kapitole jsou podány definice pojmů použitých v této práci a také znění několika vět z teorie grafů, jejichž důsledky jsou v této práci využívány.

Třetí kapitola se zabývá vlastnostmi grafů, o nichž je známo, že se pokrývají.

Čtvrtá kapitola přináší koncept stupňového rozdělení vrcholů grafu a na jeho základě zkoumá matice sousednosti a matice rozdělení grafů. V závěru kapitoly je popsána závislost vlastních čísel pokrývaného a pokrývacího grafu.

Pátá kapitola se zabývá konstrukcí grafů, jež mají pokrývat dané regulární grafy.

Šestá kapitola se zabývá problematikou částečného pokrytí a solidních grafů. Mimo jiné je zde rozebrána hranová souvislost solidních grafů a ukázána ekvivalence částečného a úplného pokrytí pro grafy, mezi nimiž existuje pokrytí.

Sedmá, závěrečná kapitola obsahuje shrnutí celé práce a také příklady tříd grafů, pro něž je problém H -COVER polynomiální, respektive NP-úplný.

Kapitola 2

Definice a značení

Zde uvádíme použité značení matematických objektů a definice základních pojmů.

2.1 Grafy, zobrazení a matice

Nejprve zopakujeme několik pojmů z teorie grafů.

Definice 2.1: *Graf je dvojice (V, E) , kde V je konečná množina nazývaná množinou vrcholů a E je množina hran na těchto vrcholech, neboli množina neuspořádaných dvojic. Formálně lze psát $E \subseteq \binom{V}{2}$.*

Pro grafy budeme používat obvykle písmena G a H . Z definice plyne, že grafy jsou vesměs prosté, čili bez smyček a násobných hran.

Vrcholy grafu obvykle značíme u, v, w , množinu vrcholů grafu G značíme $V(G)$, pro úspornost někdy V_G , resp. pouze V , a to v případě, že nemůže dojít k záměně s množinou vrcholů jiného grafu.

Podobně hrany grafu značíme obvykle e a pro množinu hran grafu G používáme symboly $E(G)$, E_G , popřípadě pouze E .

Platí-li, že vrcholy u a v jsou spojeny hranou e , potom píšeme $(u, v) = e$ a platí $u \in e, v \in e$.

Definice 2.2: Říkáme, že graf G_0 je podgrafem grafu G , jestliže platí:

$$V(G_0) \subseteq V(G) \quad E(G_0) \subseteq E(G).$$

Je-li V_1 podmnožina množiny vrcholů grafu G , potom podgraf grafu G indukovaný vrcholy V_1 je graf $G_1 = (V_1, E_1)$, kde

$$E(G_1) = E(G) \cap \binom{V(G_1)}{2}.$$

Podobně je-li E_2 podmnožina množiny hran grafu G , potom podgraf grafu G indukovaný hranami E_2 je graf $G_2 = (V_2, E_2)$, kde

$$V_2 = \{u : \exists e \in E_2, u \in e\}.$$

Uvedené indukované grafy dále značíme symboly $G|_{V_1}$ a $G|_{E_2}$.

Definice 2.3: Orientovaný graf je dvojice $(V, E) = (V(\vec{G}), E(\vec{G}))$, kde $V(\vec{G})$ je konečná množina vrcholů a $E(\vec{G})$ je množina orientovaných hran na těchto vrcholech, neboli množina uspořádaných dvojic, již můžeme formálně nadefinovat:

$$E(\vec{G}) \subseteq (V(\vec{G}) \times V(\vec{G})) \setminus \{[u, u] : \forall u \in V(\vec{G})\}.$$

Orientované grafy označujeme symboly \vec{G}, \vec{H} . V orientovaném grafu značíme orientovanou \vec{e} hranu z vrcholu u do v pomocí hranatých závorek, t.j. $[u, v] = \vec{e}$.

Definice 2.4: Pro vrchol u grafu G značí symbol $\deg_G(u)$ stupeň vrcholu v grafu G a platí:

$$\deg_G(u) = |\{e : e \in E(G), u \in e\}|.$$

Podobně pro $u \in V(\vec{G})$ znamená $\text{indeg}_{\vec{G}}(u)$, resp. $\text{outdeg}_{\vec{G}}(u)$, vstupní, resp. výstupní, stupeň vrcholu v grafu \vec{G} a platí:

$$\text{indeg}_{\vec{G}}(u) = |\{\vec{e} : \vec{e} \in E(\vec{G}), \exists v \in V(\vec{G}) : \vec{e} = [v, u]\}|,$$

$$\text{outdeg}_{\vec{G}}(u) = |\{\vec{e} : \vec{e} \in E(\vec{G}), \exists v \in V(\vec{G}) : \vec{e} = [u, v]\}|.$$

V textu budeme používat následující symboly pro speciální druhy grafů:

Definice 2.5: Symbol C_n značí cyklus délky n , neboli graf definovaný:

$$V(C_n) = \{u_1, \dots, u_n = u_0\}, \quad E(C_n) = \{(u_{i-1}, u_i) : \forall i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Symboly K_n a $K_{n,n}$ označují úplný graf na n vrcholech a úplný bipartitní graf, kde velikost partit je rovna n a platí:

$$V(K_n) = \{u_1, \dots, u_n\}, \quad E(K_n) = \binom{V(K_n)}{2},$$

$$V(K_{m,n}) = \{u_1, \dots, u_{m+n}\},$$

$$E(K_{n,n}) = \{(u_i, u_j) : \forall i = 1, \dots, m \quad \forall j = m + 1, \dots, m + n\}.$$

Definice 2.6: Cesta v grafu G spojující vrchol u_1 s vrcholem u_n je posloupnost vrcholů a hran z G : $(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n)$ taková, že pro $\forall i = 2, \dots, n$ platí: $(u_{i-1}, u_i) \in E(G)$ a každý vrchol z $V(G)$ se v této posloupnosti vyskytuje nejvýše jednou, neboli $\forall j \neq i : u_j \neq u_i$.

Definice 2.7: Graf G je hranově k -souvislý, jestliže každé dva vrcholy spojuje k hranově disjunktních cest, neboli pro cesty (u_1, u_2, \dots, u_n) a (u_1, u'_2, \dots, u_n) jsou množiny $E(G|_{((u_1, u_2, \dots, u_n))})$ a $E(G|_{((u_1, u'_2, \dots, u_n))})$ disjunktní. Graf G je vrcholově k -souvislý, pakliže každé dva vrcholy spojuje k cest, které jsou, až na koncové vrcholy, disjunktní. Hranovou souvislost budeme zkráceně zapisovat jako e -souvislost, vrcholovou potom v -souvislost.

Souvislým grafem rozumíme 1-souvislý graf, neboli takový graf, kde každé dva vrcholy spojuje alespoň jedna cesta.

Definice 2.8: *Komponenta souvislosti je vzhledem k inkluzi maximální souvislý podgraf.*

Artikulace je takový vrchol, jehož odebráním se zvýší počet komponent grafu.

Most je taková hrana, jejímž odebráním se zvýší počet komponent grafu.

Hranový řez je taková množina hran $E' \subset E(G)$, pro níž má graf $G|_{E(G)\setminus E'}$ více komponent, než graf G . Podobně vrcholový řez je množina vrcholů $V' \subset V(G)$ splňující podmínku, že graf $G|_{V(G)\setminus V'}$ má více komponent, než graf G .

Při zkoumání souvislosti grafů budeme často používat důsledky Mengerovy a Ford-Fulkersonovy věty, jejichž důkaz lze nalézt v [4].

Věta (Menger): *Graf G je hranově k -souvislý právě tehdy, je-li velikost minimálního hranového řezu větší nebo rovna k .*

Věta (Ford-Fulkerson): *Graf G je vrcholově k -souvislý právě tehdy, je-li velikost minimálního vrcholového řezu větší nebo rovna k .*

Dále budeme potřebovat několik pojmů z algebry.

Písmena f, g budou standardně označovat zobrazení, obvykle mezi množinami vrcholů grafů. Symbol $f \circ g$ znamená složení zobrazení f a g , tedy $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Pomocí id značíme identické zobrazení.

Definice 2.9: *Zobrazení $f : V(G) \rightarrow V(H)$ je grafový homomorfismus, jestliže platí: $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (f(u), f(v)) \in E(H)$. Prostý homomorfismus $f : V(G) \rightarrow V(G)$ nazýváme automorfismem.*

\mathbb{N} , \mathbb{R} a \mathbb{C} označují po řadě množiny přirozených, reálných, a komplexních čísel. Dále \mathbb{N}^n značí n -rozměrný vektorový prostor nad přirozenými čísly. Platí-li pro vektor $x : x \in \mathbb{N}^n$, píšeme též $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Symbol $\mathbb{N}^{n \times m}$ označuje prostor matic přirozených čísel s n řádky a m sloupci. Matice čísel značíme velkými písmeny, jejich prvky potom malými, $a_{ij} = (A)_{ij}$.

Podobným způsobem definujeme $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{C}^{n \times m}$. Vzhledem k $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ vnímáme vektor, resp. matici přirozených čísel podle potřeby jako vektor, resp. matici reálných a popřípadě komplexních čísel.

Definice 2.10: Jednotkovou matici značíme I a pro její prvky platí $(I)_{ii} = 1$, jinak $(I)_{ij} = 0$.

Definice 2.11: Pro graf G je A_G matice sousednosti grafu G , neboli očísleme-li $V(G) = \{u_1, \dots, u_n\}$, potom platí $A_G \in \mathbb{N}^{n \times n}$, $a_{Gij} = 1 \Leftrightarrow (u_i, u_j) \in E(G)$, jinak $a_{Gij} = 0$.

2.2 Pokrytí a částečné pokrytí

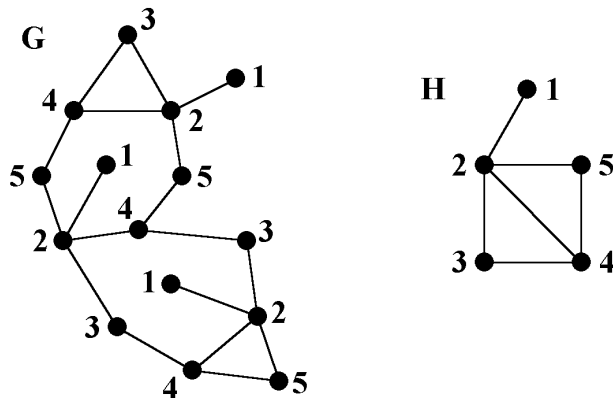
Definice 2.12: Říkáme, že graf G pokrývá graf H , jestliže existuje zobrazení $f : V(G) \rightarrow V(H)$, jež splňuje následující tři podmínky:

- (1) $\forall u, v \in V(G) : (u, v) \in E(G) \Rightarrow (f(u), f(v)) \in E(H)$,
- (2) $\forall u \in V(G) : \deg_G(u) = \deg_H(f(u))$,
- (3) $\forall (u, v), (u, w) \in E(G) : f(v) \neq f(w)$.

Zobrazení f nazýváme pokrytím grafu H grafem G . Graf G budeme nazývat pokrývací graf, grafu H budeme říkat pokrývaný graf.

Pro své vlastnosti se pokrytí také nazývá "lokální izomorfismus".

Na následujícím obrázku uvádíme příklad pokrytí grafu H grafem G . Pokrytí je definováno pomocí čísel u vrcholů grafů: čísla u vrcholů grafu G udávají, na které vrcholy z H se pokrytím zobrazí.

Obr. 1: Příklad pokrytí grafu H grafem G

Poznamenejme, že při zkoumání pokrytí není podstatné, je-li pokrývací graf G souvislý. V případě, že není, zkoumáme pokrytí postupně na jeho komponentách souvislosti. Pro pokrývaný graf H je již v některých problémech podmínka souvislosti podstatná. Proto dále graf G považujeme bez újmy na obecnosti za souvislý, avšak potřebujeme-li pro platnost některých tvrzení souvislost grafu H , je výslovně uvedena.

Nyní uvedeme několik triviálních důsledků pro zobrazení f , jež je pokrytím grafu H grafem G :

1. Zobrazení f je grafový homomorfismus, neboť podmínka (1) je definicí homomorfismu.
2. Je-li $(u, v) \in E(G)$, pak $f(u) \neq f(v)$. Plyne z faktu, že graf H je beze smyček.
3. Každý automorfismus grafu G je zároveň pokrytím grafu G sebou samým.
4. Pokrývá-li graf G_1 graf G_2 a zároveň graf G_2 pokrývá graf G_3 , pak také graf G_1 pokrývá graf G_3 .

Důkaz: Složením pokrytí $f_1 : G_1 \rightarrow G_2$ a $f_2 : G_2 \rightarrow G_3$ získáme zobrazení $f_2 \circ f_1 : G_1 \rightarrow G_3$. Toto zobrazení je pokrytí, neboť:

$$(1) (u, v) \in E(G_1) \Rightarrow (f_1(u), f_1(v)) \in E(G_2) \Rightarrow (f_2 \circ f_1(u), f_2 \circ f_1(v)) \in$$

$E(G_3)$,

$$(2) \deg_{G_1}(u) = \deg_{G_2}(f_1(u)) = \deg_{G_3}(f_2 \circ f_1(u)),$$

$$(3) (u, v), (u, w) \in E(G_1) \Rightarrow f_1(v) \neq f_1(w), \text{ tedy platí}$$

$$(f_1(u), f_1(v)), (f_1(u), f_1(w)) \in E(G_2) \text{ a zároveň}$$

$$(f_1(u), f_1(v)) \neq (f_1(u), f_1(w)), \text{ takže } f_2 \circ f_1(v) \neq f_2 \circ f_1(w). \quad \square$$

5. Je-li f pokrytí grafu H grafem G a dále existuje $g \neq id$ automorfismus grafu H , potom $g \circ f$ je také pokrytí grafu H grafem G , různé od f .

Definice 2.13: Pokrývá-li graf G graf H , definujeme na $V(G)$ pokrývací ekvivalenci \simeq následovně: $u_1, u_2 \in V(G) : u_1 \simeq u_2 \Leftrightarrow f(u_1) = f(u_2)$. Dále pro vrcholy $v \in V(H)$ definuji třídy pokrývací ekvivalence $V_v(G) = \{u : u \in V(G), f(u) = v\}$.

Definice 2.14: Zobrazení $f : V(G) \rightarrow V(H)$ nazýváme částečné pokrytí grafu H grafem G , jestliže splňuje:

$$(1) \forall u, v \in V(G) : (u, v) \in E(G) \Rightarrow (f(u), f(v)) \in E(H),$$

$$(2) \forall u \in V(G) : \deg_G(u) \leq \deg_H(f(u)),$$

$$(3) \forall (u, v), (u, w) \in E(G) : f(v) \neq f(w).$$

Platí, že každé pokrytí je i částečné pokrytí, neboť podmínky (1), (3) z definic jsou shodné, podmínka (2) je u částečného pokrytí obecnější.

Kapitola 3

Vlastnosti pokrytí

V této kapitole se budeme zabývat vlastnostmi grafů, o nichž víme, že se navzájem pokrývají. Není-li uvedeno jinak, značí f pokrytí grafu H grafem G .

3.1 Barevnost

Pozorování: Pokrývá-li graf G graf H , potom pro barevnost grafů platí $\chi(G) \leq \chi(H)$.

Důkaz: Jsou-li f pokrytí a g_H obarvení grafu H pomocí $\chi(H)$ barev, je $g_G = g_H \circ f$ obarvení grafu G také pomocí $\chi(H)$ barev. Proto platí uvedená nerovnost. \square

Podotýkáme, že v konkrétních příkladech se může vyskytnout i ostrá nerovnost, např. cyklus C_6 pokrývá C_3 , zatímco $\chi(C_6) = 2 < 3 = \chi(C_3)$.

3.2 Surjektivita pokrytí

Při zkoumání pokrytí bude hrát důležitou roli následující lemma, které nám umožní vyhledávat v pokrývacím grafu sousedící vrcholy, a to podle sousednosti jejich obrazů v pokrývaném grafu. Uvedené lemma nejdříve použijeme pro důkaz surjektivitu pokrytí pro souvislé grafy H .

Lemma 3.1: *Bud' $u \in V(G)$, $v = f(u)$, $(v, v') \in E(H)$. Pak existuje právě jeden $u' \in V(G)$ tak, že $(u, u') \in E(G)$ a $f(u') = v'$.*

Důkaz: Označíme-li $S_{G,u}$ podgraf v G , jež obsahuje všechny hrany vedoucí z vrcholu u (hvězda v G se středem u), potom je $f|_{V(S_{G,u})}$ bijekce na $V(S_{H,f(u)})$. Z definice pokrytí plyne, že je ze (3) je prostá, ze (2) surjektivní. Vrchol $v' \in V(S_{H,f(u)})$ a hledaný vrchol u' je jeho vzorem. \square

Důsledek 3.2: Nyní můžeme dokázat: pokud je graf H souvislý, potom je každé pokrytí $f : G \rightarrow H$ surjektivní homomorfismus.

Důkaz: Dokážeme, že libovolný vrchol $v \in V(H)$ je obrazem nějakého vrcholu z $V(G)$. Budiž u_0 vrchol grafu G a $v_0 = f(u_0)$ jeho obraz. Graf H je souvislý, a proto existuje cesta $(v_0, v_1, \dots, v_n = v)$ spojující vrcholy v_0 a v . Aplikací předchozího lemmatu mohu najít v grafu G posloupnost vrcholů (u_0, u_1, \dots, u_n) takovou, že $f(u_i) = v_i$ pro všechna $i = 1, \dots, n$. Odtud pro vrchol u_n platí $f(u_n) = v_n = v$, což bylo dokázati. \square

Z předchozího důsledku také vyplývá, že je-li graf G souvislý, potom každé pokrytí grafu G sebou samým je automorfismus.

3.3 Zúžení pokrytí

Pozorování: Pokrývá-li graf G souvislý graf H a H_1 je podgraf H , potom v grafu G existuje podgraf G_1 , který pokrývá H_1 .

Důkaz: Vezmeme-li f_e jako zobrazení $E(G) \rightarrow E(H)$ definované $f_e((u, v)) = (f(u), f(v))$, pak platí, že f je surjektivní, neboť graf H je souvislý a odtud je zobrazení f_e surjektivním homomorfismem. Hledaný graf $G_1 = G|_{f_e^{-1}(E(H_1))}$ je díky surjektivitě zobrazení f_e neprázdný. \square

Je-li H_1 souvislý, můžeme též požadovat souvislost grafu G_1 , pak za G_1 vybereme jednu z komponent souvislosti grafu $G|_{f^{-1}(E(H_1))}$.

Podobně platí, že je-li H_1 indukovaný podgraf v grafu H , pak G_1 bude též indukovaný v grafu G a můžeme jej nadefinovat $G_1 = G|_{f^{-1}(V(H_1))}$, neboli beze změny smyslu zobrazení f .

Definice 3.3: Necht' f je pokrytí souvislého grafu H grafem G a existuje taková množina vrcholů $\{u_1, u_2, \dots, u_{|V(H)|}\} \in V(G)$, že pro $\forall i \neq j$ platí $f(u_i) \neq f(u_j)$, potom tuto množinu nazýváme podvzorem grafu H v grafu G a značíme $V(G)^H$.

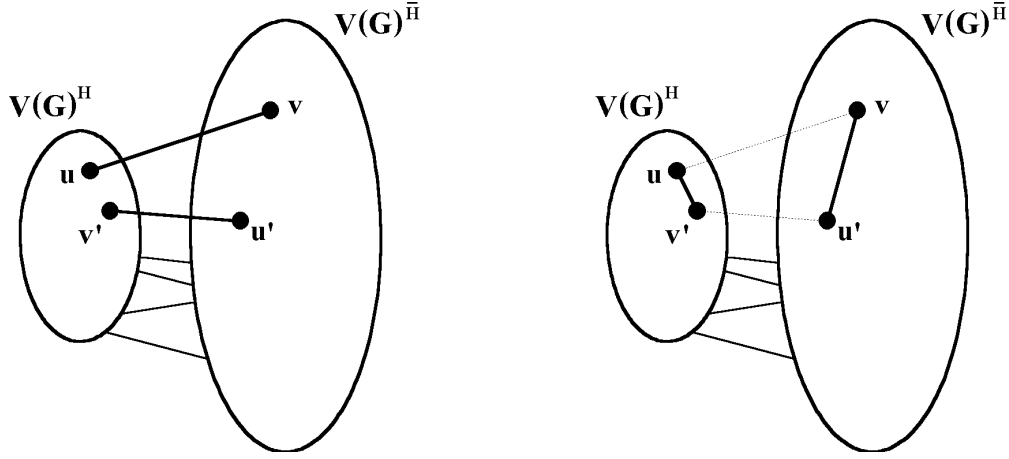
Je na místě podotknout, že pro nesouvislý graf H by žádná taková množina nemusela existovat a definice podvzoru $V(G)^H$ by pak neměla smysl. Pro takové grafy lze pro komponentu, jež obsahuje alespoň jeden vrchol z oboru hodnot pokrytí, nadefinovat podvzor komponenty souvislosti H v grafu G .

Lemma 3.4: $f|_{V(G)^H}$ je bijekce.

Důkaz: Z definice f je prosté na $V(G)^H$, dále $V(G)^H$ a $V(H)$ jsou konečné a $|V(G)^H| = |V(H)|$, pak f je surjektivní a tedy bijekce. \square

Značení: Množinu $V(G) \setminus V(G)^H$ nazýváme doplňkem podvzoru H v G a budeme ji značit $V(G)^{\bar{H}}$

V následujícím lemmatu tvrdíme, že hrany mezi $V(G)^H$ a $V(G)^{\bar{H}}$ můžeme rozdělit do párů tak, že obě hrany v páru se zobrazí na společnou hranu z $E(H)$. Na obrázku pak vidíme graf se zaměnitelnými hranami a situaci po záměně.



Obr. 1: Záměna hran

Lemma 3.5: $\forall (u, v) \in E(G), u \in V(G)^H, v \in V(G)^{\bar{H}} : \exists! (u', v') \in E(G)$
 $v' \in V(G)^H, u' \in V(G)^{\bar{H}},$ kde $f(u) = f(u'), f(v) = f(v')$.

Důkaz: Protože platí $f(u) \neq f(v)$, musí díky bijekci $V(G)^H \rightarrow H$ existovat vrchol $v' \in V(G)^H$ takový, že $f(v') = f(v)$. Dále hrana $(u, v') \notin E(G)$, neboť by hrany (u, v') a (u, v) byly ve sporu s podmínkou (3) definice pokrytí. Podle lemmatu 3.1 pro vrchol v' a hranu $(f(v'), f(u)) = (f(v), f(u)) \in E(H)$ musí existovat vrchol u' takový, že $(u', v') \in E(G)$ a $f(u') = f(u)$. Vzhledem k bijekci f na $V(G)^H$ a předpokladu $u \in V(G)^H$ nutně $u' \in V(G)^{\bar{H}}$. \square

Značení: Hrany z předchozího lemmatu nazýváme zaměnitelné.

Definice 3.6: Necht' f je pokrytí grafu H grafem G a $V(G)^H$ je podvzorem H v G . Pak definujeme odtržení grafu H od grafu G , značíme $G = \tilde{G} \oplus \tilde{H}$, takto:

1. $V(\tilde{G}) = V(G)^{\bar{H}}, V(\tilde{H}) = V(G)^H,$
2. pro $(u, v) \in E(G)$ platí jedna z možností:
 - a) $u, v \in V(\tilde{H}),$ pak necht' $(u, v) \in E(\tilde{H}),$
 - b) $u, v \in V(\tilde{G}),$ pak necht' $(u, v) \in E(\tilde{G}),$

c) $u \in V(\tilde{H}), v \in V(\tilde{G})$, pak podle lemmatu 3.4 existuje hrana (u', v') zaměnitelná s (u, v) a nechť tedy $(u, v') \in E(\tilde{H}), (v, u') \in E(\tilde{G})$.

Lemma 3.7: Pokrývá-li graf G graf H a $G = \tilde{G} \oplus \tilde{H}$, pak \tilde{H} je izomorfní s H a \tilde{G} pokrývá H .

Důkaz: Zobrazení $f|_{\tilde{H}}$ je izomorfismus H a \tilde{H} a zobrazení $f|_{\tilde{G}}$ je pokrytí grafu H grafem \tilde{G} . Záměna zaměnitelných hran podmínky (1), (2) a (3) z definice pokrytí neporuší. \square

Důsledek 3.8: Existuje přirozené c takové, že pokrývá-li graf G souvislý graf H , pak $|V(G)| = |V(H)| \cdot c$.

Důkaz: Konečnou aplikací lemmatu 3.6. Posloupnost $G = G^1, \tilde{G} = G^2, \tilde{\tilde{G}} = G^3, \dots, G^c$ je posloupnost konečných grafů s klesajícím počtem vrcholů, tudíž je konečná. V každém kroku odebereme $|V(H)|$ vrcholů. Graf G^c je nejmenší takový, že pokrývá H , tedy je s ním izomorfní a $|V(G^c)| = |V(H)|$. Zpětně dostáváme $|V(G)| = |V(H)| \cdot c$.

Příklad 3.9: Pokrývá-li souvislý graf G cyklus C_k , potom $G = C_{c \cdot k}$ pro nějaké přirozené c .

Důkaz: Z podmínky (2) definice pokrytí je G cyklus a podle předchozího důsledku má délku $c \cdot k$. \square

Pozorování: Aplikujeme-li předchozí pozorování na tento příklad, neboli pokrývá-li graf G graf H , graf H je souvislý a existuje v něm cyklus C_H délky k , potom v grafu G existuje cyklus délky $c \cdot k$ pro nějaké přirozené c .

Lemma 3.10: Pokrývá-li graf G souvislý graf H , potom všechny třídy pokrývací ekvivalence $V_v(G)$ mají stejnou velikost.

Důkaz: Nechť $(v_1, v_2) \in E(H)$, potom podle lemmatu 3.1 pro každý vrchol $u_1 \in V_{v_1}(G)$ existuje právě jeden vrchol $u_2 \in V_{v_2}(G)$ tak, že $(u_1, u_2) \in E(G)$. Z toho plyne $|V_{v_1}(G)| \leq |V_{v_2}(G)|$ a po záměně v_1 a v_2 získáme rovnost. Díky souvislosti grafu H platí rovnost velikostí pro všechny třídy $V_v(G)$. \square

Důsledek 3.11: Odtud také plyne důsledek 3.8 a navíc víme, že $c = |V_v(G)|$.

3.4 Souvislost pokrývacích grafů

V tomto odstavci zkoumáme vztah mezi hranovou souvislostí pokrývaného a pokrývacího grafu. Pokud není výslovně uvedeno, veškeré dvousouvislosti, resp. třísouvislosti, jsou míněny ve smyslu hranové dvousouvislosti, resp. třísouvislosti.

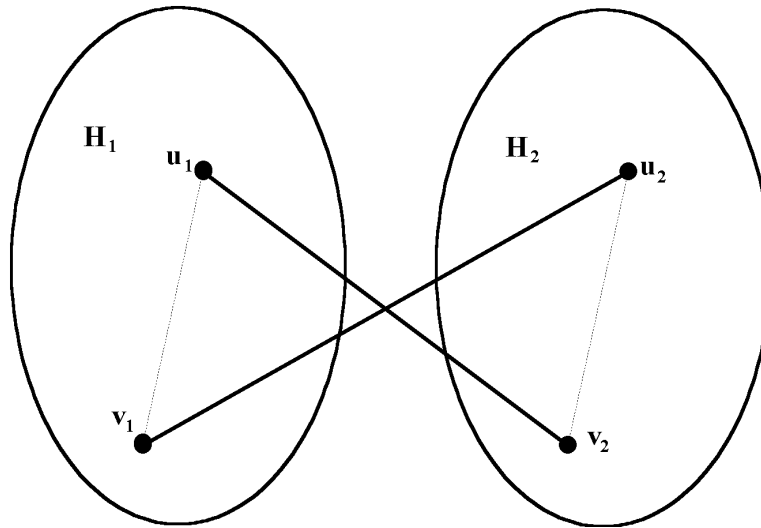
Lemma 3.12: *Pokrývá-li souvislý graf G hranově dvousouvislý graf H , potom G je též hranově dvousouvislý.*

Důkaz: Sporem. Nechť hrana $e = (u_0, u_1)$ je most a G_0, G_1 jsou komponenty grafu G po odstranění hrany e . Graf H je dvousouvislý, proto v něm existuje cyklus s hranou $(f(u_0), f(u_1))$. Očíslujme vrcholy tohoto cyklu $f(u_1) = v_1, v_2, \dots, v_k = f(u_0)$. Pro třídy pokrývací ekvivalence musí platit $|V_{v_1}(G_1)| = |V_{v_2}(G_1)| = \dots = |V_{v_k}(G_1)|$ díky argumentu z důkazu lemmatu 3.10. Zároveň však platí $|V_{v_1}(G_1)| = |V_{v_k}(G_1)| + 1$, neboť pro každé $u \in V_{v_1}(G_1) u \neq u_1$ musí existovat soused ve třídě $V_{v_k}(G_1)$ a vrchol u má souseda ve třídě $V_{v_k}(G_0)$. Platí tedy $|V_{v_k}(G_1)| = |V_{v_1}(G_1)| = |V_{v_k}(G_1)| + 1$, což je hledaný spor. \square

Pozorování: Pro každý hranově dvousouvislý graf H existuje dvousouvislý, ale nikoliv třísouvislý graf G , který H pokrývá.

Důkaz: Nechť $(u, v) = e \in E(H)$. Za G vezmu dvě kopie grafu H a hrany $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ nahradím hranami $(u_1, v_2), (u_2, v_1)$. Graf G pokrývá H , ale díky těmto hranám, jež tvoří most, není třísouvislý. \square

Následující obrázek ilustruje toto pozorování. Tečkované hrany jsou odstraněny a nahrazeny plnými.



Obr. 1: Pokrývání dvousouvislým grafem

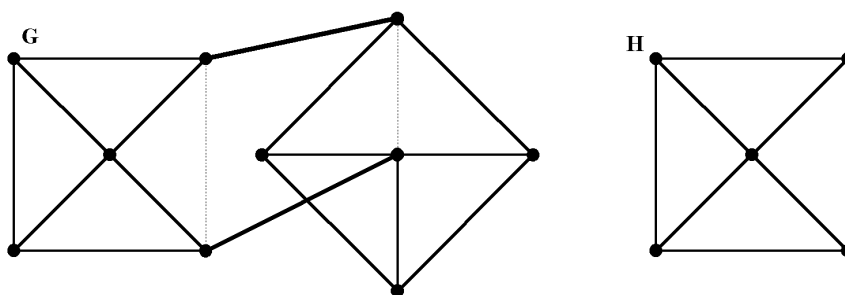
Lemma 3.13: *Nechť graf G pokrývá graf H a H je třísouvislý, zatímco G není třísouvislý. Budiž hrany e_1, e_2 řez v grafu G , dělící jej na komponenty G_1 a G_2 . Označme vrcholy $u_1, w_1 \in V(G_1), u_2, w_2 \in V(G_2)$ tak, že $e_1 = (u_1, w_2), e_2 = (u_2, w_1)$. Potom platí $f(u_1) = f(u_2)$ a $f(w_1) = f(w_2)$.*

Důkaz: Vezměme v H cyklus $f(u_1) = v_1, v_2, \dots, v_k = f(w_2)$. Potom pro velikosti tříd ekvivalence platí $|V_{v_1}(G_1)| = |V_{v_2}(G_1)| = \dots = |V_{v_k}(G_1)|$. Protože však pro u_1 neexistuje soused ve $V_{v_k}(G_1)$, musí existovat $w_1 \in V_{v_k}(G_1)$, takové, že w_1 má souseda $u_2 \in V_{v_1}(G \setminus G_1)$. Platí $f(u_1) = v_1 = f(u_2), f(w_1) = v_k = f(w_2)$.

□

Při zkoumání grafů G pokrývajících třísouvislé grafy H se můžeme omezit na jejich komponenty vzniklé odtržením 2-mostů a přidáním hran spojujících konce 2-mostů. Pokud alespoň jedna komponenta nebude pokrývat H , potom ani G nepokrývá H .

Pozorování: Obrácené tvrzení neplatí. Protipříklad získáme podobnou konstrukcí jako u předchozího pozorování, nyní však nahradím dvojice hran, jež vedou do vrcholů s rozdílnými stupni. Tento případ ilustruje následující obrázek. Graf G nepokrývá graf H , ačkoli po odtržení mostů jsou obě komponenty izomorfní s H .



Obr. 1: Protipříklad při pokrývání dvousouvislým grafem

Lemma 3.14: *Je-li graf H m -souvislý, graf G pokrývá H a E' je hranový řez s nejvýše $m - 1$ hranami spojující dvě komponenty grafu G , potom řez E' obsahuje sudý počet hran.*

Důkaz: Označme G_1 komponentu grafu G po odebrání řezu E' a $E' = \{e_1, e_2, \dots, e_{k < m}\}$ hrany, vedoucí z této komponenty souvislosti, $e_i = (u_i, u'_i), u_i \in V(G_1)$. Buď H' pomocný graf, který vznikne z grafu H odebráním všech hran $f(e_1), \dots, f(e_k)$. Díky m -souvislosti H je graf H' souvislý. Vezměme libovolnou hranu $e_i \in E'$. Vrcholy $f(u_i)$ a $f(u'_i)$ spojuje v H' cesta $f(u_i) = v_1, \dots, v_l = f(u'_i)$. Nyní podobně jako v důkazu lemmat 3.11 a 3.12 platí $|V_{v_1}(G_1)| = \dots = |V_{v_l}(G_1)|$ a přitom u_i nemá souseda ve $V_{v_l}(G_1)$. Proto musí existovat hrana $e_j \in E' \setminus \{e_i\}$, kde pro její vrcholy platí $f(u_j) = v_l = f(u'_i)$ a $f(u'_j) = v_1 = f(u_i)$. (Takových hran může být více, podstatná je existence alespoň jedné hrany.) Po záměně hran e_i a e_j získáme graf \bar{G} , který pokrývá H a v němž podgraf \bar{G}_1 indukovaný na $V(G_1)$ tvoří komponentu m -souvislosti, do níž vedou hrany $E' \setminus \{e_1, e_2\}$. Tento proces můžeme opakovat tak dlouho, dokud množina E' není prázdná. V každém kroku

z množiny E' odebereme 2 hrany, a proto je jejich počet sudý. \square

Závěrem kapitoly uvedeme jedno lemma, které umožňuje popsat vztah mezi vrcholovou souvislostí pokrývacího a pokrývaného grafu.

Lemma 3.15: *Pokrývá-li souvislý graf G vrcholově dvousouvislý graf H , potom G je též vrcholově dvousouvislý.*

Důkaz: Sporem. Budiž u artikulace v grafu G a vrcholy u_0, u_2 jeho susedé, každý z jiné komponenty souvislosti. Graf H je vrcholově dvousouvislý, a proto v něm existuje kružnice taková, že obsahuje hrany $(f(u_0), f(u_1))$ a $(f(u_1), f(u_2))$. Podle pozorování na začátku článku 3.3 existuje v G kružnice, jež obsahuje hrany (u_0, u_1) a (u_1, u_2) , což je spor s předpokladem, že vrchol u_1 je artikulace. Žádný z vrcholů nemůže být artikulací, a proto je graf G vrcholově dvousouvislý. \square

Kapitola 4

Aplikace lineární algebry

Tato kapitola zkoumá problém pokrytí spíše algebraickými metodami. Zaměříme se na vztah matic sousednosti pokrývaného a pokrývacího grafu. Pro speciální třídu pokrývaných grafů získáme metodu, s jejíž pomocí lze pro libovolný pokrývací graf v polynomiálním čase zjistit, zdali zkoumaný graf pokrývá. Také zde upozorňujeme na několik aspektů týkajících se vlastních čísel matic sousednosti pokrývaného a pokrývacího grafu.

4.1 Stupňové rozdělení

Pro tuto kapitolu budeme potřebovat několik definic nových pojmů. Stupňové rozdělení a jeho uspořádání dělí vrcholy grafu nejprve do tříd podle stupňů a potom je toto rozdělení zjemňováno podle rozdělení sousedů vrcholů. Lemma 4.6. říká, že provedeme-li stupňové rozdělení vrcholů pokrývaného a pokrývacího grafů, lze vrcholy z jedné třídy stupňové ekvivalence pokrývacího grafu zobrazit

pouze na vrcholy z odpovídající třídy pokrývaného grafu. Pokrývací ekvivalence je zjemněním stupňové ekvivalence a při zkoumání grafů s "podrobným" rozdělením vrcholů do tříd stupňové ekvivalence může být stupňové rozdělení užitečným nástrojem pro potvrzení či vyloučení existence pokrytí.

Dlužno dodat, že pro zkoumání grafů s jednou nebo několika málo třídami stupňové ekvivalence (např. regulární grafy nebo grafy s bohatou grupou automorfismů) metody zde ukázané nemusí být příliš úspěšné.

Definice 4.1: Mějme posloupnost systémů vrcholů grafu G :

$$(1) \mathcal{B}^0 = \{V(G)\},$$

$$\mathcal{B}^1 = \{B_1^1, B_2^1, \dots, B_{k_1}^1\} \text{ tak, že:}$$

$$u, v \in B_j^1 \Leftrightarrow \deg_G(u) = \deg_G(v),$$

$$(2) \text{ Máme-li pro } \mathcal{B}^i = \{B_1^i, B_2^i, \dots, B_{k_i}^i\} \text{ značíme:}$$

$$r(u)_j^i = |\{v : (u, v) \in E(G), v \in B_j^i\}|,$$

... počet sousedů vrcholu u v třídě B_j^i

$$u \approx_i v \Leftrightarrow \exists l : u, v \in B_l^i, \dots \text{ ekvivalence vrcholů vzhledem k } \mathcal{B}^i$$

a definujeme $\mathcal{B}^{i+1} = \{B_1^{i+1}, B_2^{i+1}, \dots, B_{k_{i+1}}^{i+1}\}$ tak, že:

$$u, v \in B_j^{i+1} \Leftrightarrow u \approx_i v, \text{ a zároveň } \forall l \in \{1, \dots, k_i\} : r(u)_l^i = r(v)_l^i.$$

Platí-li pro nějaké i , že $\mathcal{B}^i = \mathcal{B}^{i+1}$, pak systém \mathcal{B}^i nazýváme stupňovým rozdělením grafu G a nadále značíme $\mathcal{B}_G = \{B_1, \dots, B_k\}$. Vzhledem ke konečnosti množiny $V(G)$ takové i existuje. Ekvivalenci \approx_i nazýváme stupňovou ekvivalencí a značíme pouze \approx .

Značení: Je-li z kontextu jasné, že se jedná o stupňové rozdělení \mathcal{B} , vynecháváme v následujícím značení index i .

Definice 4.2: Uspořádání tříd B_1, \dots, B_k v systému \mathcal{B} definujeme následovně:

(1) pro \mathcal{B}^1 platí: $u \in B_j^1, v \in B_{j+1}^1 \Leftrightarrow \deg_G(u) > \deg_G(v)$,

(2) pro \mathcal{B}^{i+1} platí: $u \in B_j^{i+1}, v \in B_l^{i+1}, j < l \Leftrightarrow$

bud' $u \in B_m^i, v \in B_n^i$, kde $m < n$,

anebo $u, v \in B_m^i$ a zároveň platí: $(r(u)_j^i)_{j=1}^{k_i} >_{Lex} (r(v)_j^i)_{j=1}^{k_i}$.

Toto uspořádání je díky úplnosti lexikografického uspořádání jednoznačné.

Definice 4.3: Pro graf G se stupňovým rozdělením $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$ definujeme matici $R \in \mathbb{N}^{k \times k}$ takto: $r_{ij} = r(u)_j, u \in B_i$. Vzhledem k uspořádání tříd B_j a definici stupňového rozdělení je definice matice R jednoznačná, neboť platí: $u, v \in B_i \Rightarrow \forall j : r(u)_j = r(v)_j$. Matici R nazýváme stupňovou maticí grafu G .

Pozorování: Řádkový součet matice R je roven stupni vrcholu, jenž je reprezentantem třídy vrcholů, s indexem tohoto řádku. Formálně zapsáno:

$$\forall u \in V(G), u \in B_i : \sum_{j=1}^k r_{ij} = \deg_G(u).$$

Řádkové součty budou neostře vzestupně uspořádány.

Důkaz: Z definice $r(u)_j$ označuje počet sousedů vrcholu u v třídě B_j . Celkový součet je počet všech sousedů a tedy stupeň vrcholu u . V systému \mathcal{B}^1 jsou vrcholy rozděleny a uspořádány do tříd podle stupňů. Při definici systému \mathcal{B}^{i+1} se pouze zjemňuje uspořádaný systém \mathcal{B}^i a uspořádání je zachováno. \square

Věta 4.4: Pokrývá-li graf G graf H , pak mají oba grafy stejné stupňové matice.

Lemma 4.5: Je-li f pokrytí grafu H grafem G a jsou-li \mathcal{B}_G^i resp. \mathcal{B}_H^i prvky posloupnosti systémů množin z definice 4.2 v grafu G resp. H , potom platí:

$$\forall u \in V(G), \forall i, j : u \in B_{G,j}^i \Leftrightarrow f(u) \in B_{H,j}^i.$$

Důkaz lemmatu 4.5: Indukcí přes i .

(1) pro $i = 1$:

$u \in B_{G,j}^1, \deg_G(u) = \deg_H(f(u)) \Rightarrow$ vzhledem k uspořádání \mathcal{B}_G^1 a \mathcal{B}_H^1 vyplývá $f(u) \in B_{H,j}^1$,

(2) platí pro i , dokazují pro $i + 1$:

za předpokladu: $u \in B_{G,j}^i, u \in B_{G,k}^{i+1}, f(u) \in B_{H,j}^i$, platí

$$\forall l : r_G(u)_l^i = r_H(f(u))_l^i$$

a dále vzhledem k uspořádání \mathcal{B}_G^{i+1} a \mathcal{B}_H^{i+1} bude $f(u) \in B_{H,k}^{i+1}$. \square

Důkaz věty 4.4: Z lemmatu 4.5 vyplývá, že máme-li stupňová rozdělení \mathcal{B}_G a \mathcal{B}_H , potom

$$\forall j, \forall u \in V(G), \forall v \in V(H) : (f(u) = v) \Rightarrow (u \in B_{G,j} \Leftrightarrow v \in B_{H,j}).$$

Dále platí $r_{G,i,j} = r_G(u)_j = r_H(f(u))_j = r_{H,i,j}$ pro $u \in B_{G,i}, f(u) \in B_{H,i}$. Stupňové matice obou grafů jsou shodné: $R_G = R_H$. \square

Lemma 4.6: Jsou-li f_1 a f_2 dvě různá pokrytí grafu H grafem G , potom pro vrcholy u_1 a u_2 platí $f_1(u_1) = f_2(u_2) \Rightarrow u_1 \approx u_2$.

Důkaz: Z lemmatu 4.5 bezprostředně plyne

$$\forall i, j : u_1 \in B_{G,j}^i \Leftrightarrow f_1(u_1) \in B_{H,j}^i \Leftrightarrow f_2(u_2) \in B_{H,j}^i \Leftrightarrow u_2 \in B_{G,j}^i,$$

neboli $u_1 \approx_i u_2$ pro všechna i a tedy $u_1 \approx u_2$. \square

Jednoduchou aplikací tohoto lemmatu je fakt, že máme-li automorfismus f grafu G a pro vrcholy u a v platí $f(u) = v$, potom nutně oba vrcholy u i v patří do stejné třídy stupňové ekvivalence.

Lemma 4.7: Pokrývá-li graf G graf H , potom pokrývací ekvivalence je zjemněním stupňové ekvivalence, neboli $\forall u, w \in V(G) : u \simeq w \Rightarrow u \approx w$.

Důkaz: Formálně:

$$f(u) = v = f(w) \Rightarrow \exists j : (u \in B_{G,j} \Leftrightarrow v \in B_{H,j} \Leftrightarrow w \in B_{G,j}). \quad \square$$

Věta 4.8: Platí-li pro grafy G, H vztah $R_G = A_H$, potom graf G pokrývá graf H , neboli existuje takové zobrazení f , pro které platí podmínky z definice pokrytí.

Důkaz: Pro vrchol $u \in B_{G,j}$ definuji $f(u) = v_j$. Ověřuji podmínky pro pokrytí:

- (1) $u, w \in V(G)$, $(u, w) \in E(G) \Rightarrow f(u) = v_i, f(w) = v_j, i \neq j$ neboť $r_{G,ii} = a_{H,ii} = 0$. Dále platí

$$a_{H,ij} = r_{G,ij} > 0 \Rightarrow a_{H,ij} = 1 \Rightarrow (v_i, v_j) = (f(u), f(w)) \in E(H),$$

- (2) $u \in V(G)$, $f(u) = v_i$, potom

$$\deg_G(u) = \sum_{k=1}^n r_{G,ik} = \sum_{k=1}^n a_{H,ik} = \deg_H(v_i),$$

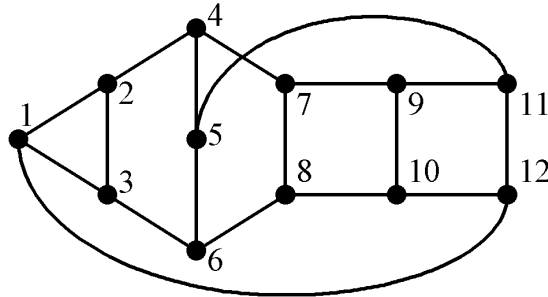
- (3) pro hrany $(u, w_1), (u, w_2) \in E(G)$, $f(w_1) = v_i, f(w_2) = v_j$ nutně platí $i \neq j$ a odtud $f(w_1) \neq f(w_2)$. Kdyby $i = j$, potom pro $f(u) = v_k$ platí $2 \leq r_{G,ki} = r_{G,ki} = a_{H,ki} \leq 1$, což je spor. \square

Při zkoumání pokrytí můžeme větu 4.8 aplikovat na třídu grafů H , pro něž platí $R_H = A_H$. Libovolný graf G potom pokrývá graf H tehdy a jenom tehdy, je-li $R_G = A_H$.

Pozorování: Grafy H z této třídy jsou strnulé, neboli mají pouze jeden automorfismus, a to identitu.

Důkaz: Sporem. Nechť existuje automorfismus g různý od identity. Identitu a tento automorfismus můžeme chápat jako dvě různá pokrytí grafu H sebou samým. Existuje tedy vrchol, pro nějž platí $u \neq g(u) = v = id(v)$. Podle lemmatu 4.5 musí vrcholy u a v patřit do stejné třídy stupňové ekvivalence a matice R_H má alespoň o jeden řádek méně než A_H , což je spor. \square

Obrácená inkluze neplatí. Na obrázku je znázorněn strnulý tříregulární graf, jehož stupňové rozdělení obsahuje jen jednu třídu a platí $R_G = (3)$.

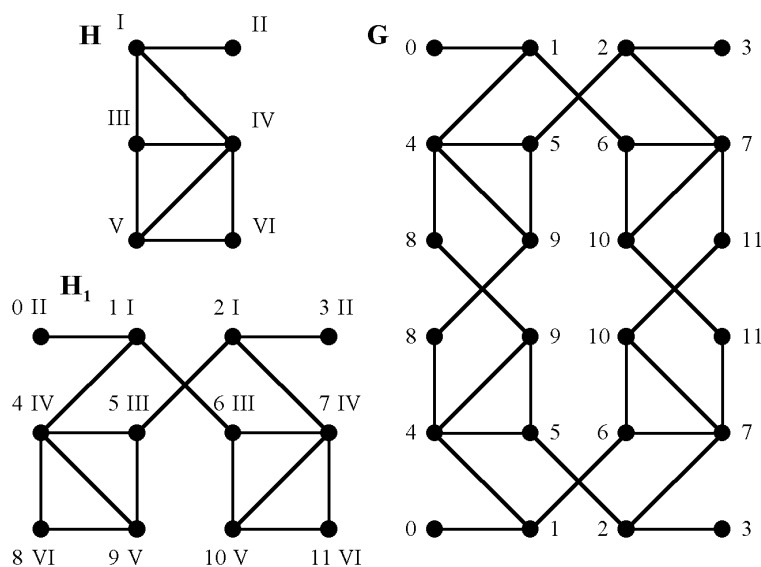


Obr. 1: Ukázka tříregulárního strnulého grafu

Důkaz tvrzení, že graf na obrázku je strnulý: Hledejme automorfismus různý od identity. V grafu je jediná kružnice délky tři $(1,2,3)$, z níž vrcholy 2 a 3 leží na kružnici délky pět. Odtud vrchol 1 se musí zobrazit sám na sebe. Pokud vrcholy 2 a 3 zobrazíme na sebe, bude vynuceno zobrazení na sebe sama i u ostatních vrcholů, čímž získáme identitu. Vrchol 2 se tedy musí zobrazit na 3 a naopak. Dále se vrchol 4 zobrazí na vrchol 6 (a naopak), vrchol 5 sám na sebe. Vrcholy 7 a 9 se zobrazí na 8 a 10 (a naopak). Nyní máme spor, neboť vrcholy 1 a 9 nemají společného souseda, stejně tak jako vrcholy 5 a 10. \square

Na závěr můžeme konstatovat, že neplatí následující tvrzení: Platí-li pro graf G , že matice R_G obsahuje pouze jedničky a nuly a na diagonále pouze nuly, může pokrývat *pouze jeden* graf, jehož matice sousednosti je shodná s R_G . Protipříklad je ukázán na následujícím obrázku. Graf G pokrývá H , ale také H_1 , čímž je předchozí tvrzení vyvráceno. Pokrytí $G \rightarrow H_1$ je popsáno arabskými číslicemi, pokrytí $H_1 \rightarrow H$ římskými číslicemi, pokrytí $G \rightarrow H$ vznikne jejich složením. Graf H je také jedním z nejmenších s vlastností $R_H = A_H$.

$$R_G = R_H = R_{H_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \dots \text{ vrchol II} \\ \dots \text{ vrchol VI} \\ \dots \text{ vrchol I} \\ \dots \text{ vrchol V} \\ \dots \text{ vrchol III} \\ \dots \text{ vrchol IV} \end{array}$$



Obr. 1: Protipříklad grafů s vlastností $R_G = A_H$

4.2 Vlastní čísla

V tomto odstavci se zaměříme na vztah vlastních čísel matic sousednosti pokrývacího a pokrývaného grafu.

Definice 4.9: Pro permutaci $\pi : \{1, \dots, c\} \rightarrow \{1, \dots, c\}$ značíme $I_\pi \in \mathbb{N}^{c \times c}$ matici permutace π a definujeme ji tak, že $(I_\pi)_{ij} = 1 \Leftrightarrow \pi(i) = j$, jinak $(I_\pi)_{ij} = 0$.

Pro $x \in \mathbb{N}$ značíme symbolem $X = (x)^{k \times l}$ matici $X \in \mathbb{N}^{k \times l}$, kde platí $(X)_{ij} = x$ pro všechna $i, j : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$. Podobně pro $x \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{C}$.

Lemma 4.10: Pokrývá-li graf G graf H , $n = |V(H)|$, $m = n \cdot c = |V(G)|$ a označí-li $A_H \in \mathbb{N}^{n \times n}$ matici sousednosti grafu H , potom matice sousednosti grafu $A_G \in \mathbb{N}^{m \times m}$ mohu napsat ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix}$$

Pro matice $B_{ij} \in \mathbb{R}^{c \times c}$ platí:

- (1) $(A_H)_{ij} = 0 \Rightarrow B_{ij} = (0)^{c \times c}$,
- (2) $(A_H)_{ij} = 1 \Rightarrow B_{ij} = I_\pi$ pro nějakou permutaci π_{ij} .

Důkaz: Řádky matice A_H dávají očíslování $V(H)$. Uspořádejme $V(G)$ tak, že nejprve vezmeme vrcholy, jež se zobrazí na první vrchol z grafu H , potom ty, jež se zobrazí na druhý vrchol, atd. Formálně: $V(G) = \{u_1, \dots, u_m\}$ tak, že $k < l$, $f(u_k) = v_i$, $f(u_l) = v_j \Rightarrow i \leq j$.

Dále matice B_{ij} popisuje vztahy mezi vrcholy u_k, u_l , takovými, že $f(u_k) = v_i$ a $f(u_l) = v_j$. Platí-li $(v_i, v_j) \notin E(H)$, potom podle podmínky (1) definice pokrytí $(u_k, u_l) \notin E(G)$, odtud plyne bod (1). Platí-li naopak $(v_i, v_j) \in E(H)$, potom podle lemmatu 3.1 pro každý u_k existuje právě jeden u_l takový, že $(u_k, u_l) \in E(G)$, čímž je dokázán i bod (2). \square

Pro úplnost poznamenejme, že z definice permutační matice využíváme pouze fakt, že matice I_π má v každém řádku a každém sloupci právě jednu hodnotu 1, zbytek jsou 0.

Lemma 4.11: Pokrývá-li graf G graf H a jsou-li A_G, A_H jejich matice sousednosti, potom existuje matice $S \in \mathbb{R}^{n \times m}$, taková, že $SA_G S^\top = A_H$.

Důkaz: Předpokládejme, že čísla m, n, c mají stejný smysl a matice A_G, A_H jsou ve stejném tvaru jako v předchozím lemmatu. Označme $\bar{c} = \sqrt{1/c}$. Matice S

má pak tvar:

$$\begin{pmatrix} \bar{c}\bar{c} \cdots \bar{c} & 00 \cdots 0 & \cdots & 00 \cdots 0 \\ 00 \cdots 0 & \bar{c}\bar{c} \cdots \bar{c} & \cdots & 00 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 00 \cdots 0 & 00 \cdots 0 & \cdots & \bar{c}\bar{c} \cdots \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{C} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \bar{C} \end{pmatrix}$$

Bloky $\bar{C} = (\bar{c})^{1 \times c}$ a $\mathbf{0} = (0)^{1 \times c}$ mají šířku c a jejich počet v řádku matice S je n . Matice S má požadovanou vlastnost, neboť:

$$\begin{aligned} (S A_G S^\top)_{ij} &= \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m (S)_{ik} (A_G)_{kl} (S^\top)_{lj} \\ &= \sum_{l'=1}^n \sum_{k'=1}^n (\bar{C})_{1k'} (B_{ij})_{k'l'} (\bar{C}^\top)_{l'1} = \bar{C} B_{ij} \bar{C}^\top. \end{aligned}$$

Pro $\bar{C} B_{ij} \bar{C}^\top$ platí:

- (1) je-li $B_{ij} = (0)^{c \times c}$, potom $\bar{C} B_{ij} \bar{C}^\top = 0$
- (2) je-li $B_{ij} = I_\pi$, potom $\bar{C} B_{ij} \bar{C}^\top = \bar{C} I_\pi \bar{C}^\top = \bar{c}^2 (1, \dots, 1) I_\pi (1, \dots, 1)^\top = \bar{c}^2 c = 1$.

□

Pro důkaz lemmatu 4.14 potřebujeme několik definic a lemmat z lineární algebry. Důkazy lemmat zde neuvádíme, ale lze je nalézt v [5].

Definice 4.12: Čtvercovou matici A komplexních čísel nazýváme hermitovskou, pokud jsou $(A)_{ij}$ a $(A)_{ji}$ komplexně sdružená čísla.

Lemma: (Bez důkazu) Vlastní čísla hermitovské matice jsou reálná.

Matice sousednosti libovolného neorientovaného grafu je reálná a symetrická, a proto ji lze chápat jako hermitovskou komplexní matici. Vlastní čísla grafu — neboli vlastní čísla matice sousednosti grafu — jsou vždy reálná.

Definice 4.13: Označme $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ všechna vlastní čísla hermitovské matice A řádu n a podobně $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_m$ vlastní čísla hermitovské matice B řádu $m < n$. Říkáme, že vlastní čísla matice B proplétají vlastní čísla matice A , pokud pro všechna $i = 1, \dots, m$ platí nerovnost $\lambda_i \leq \mu_i \leq \lambda_{i+n-m}$.

Definice využívá uspořádání vlastních čísel. Přestože vlastní čísla obecné komplexní matice mohou být i komplexní čísla a nemusely by jít uspořádat, jsou vlastní čísla hermitovské matice reálná, lze je uspořádat, a proto je definice proplétání regulární.

Lemma: (Bez důkazu) Je-li $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitovská matice a pro matici $S \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m < n$ platí, že $SS^\top = I$, potom vlastní čísla matice SAS^\top proplétají vlastní čísla matice A .

Lemma 4.14: Pokrývá-li graf G graf H , potom vlastní čísla grafu H proplétají vlastní čísla grafu G .

Důkaz: Matice sousednosti grafu jsou symetrické, a vnímáme-li je jako matice komplexních čísel, jsou i hermitovské. Pro matici S z lemmatu 4.3 platí $SS^\top = I$. Podmínky předchozího lemmatu jsou splněny, jeho aplikací získáme požadovaný výsledek. \square

Matice S existuje i pro obecné tvary matic sousednosti. Stačí provést záměnu řádků a sloupců, tak, jak jsou zaměněny řádky a sloupce matice A_G proti námi uvedenému tvaru.

Lemma 4.14 platí i pro obecnější homomorfismy. Postačující podmínkou je, aby se na každou hranu zobrazil konstantní počet hran.

Kapitola 5

Společné pokrytí

V této kapitole se zaměříme na konstrukce grafů, jež pokrývají předem dané dvojice grafů. Cykly mají následující vlastnost: cyklus $C_{k \cdot l}$ pokrývá podle příkladu 3.9 jak cyklus C_k , tak C_l , jinými slovy pro každé dva cykly C_k a C_l existuje cyklus, který je oba pokrývá. Naskýtá se otázka, zdali existuje podobná konstrukce i pro jiné třídy grafů. V této práci předvedeme konstrukci pro k -regulární grafy.

Princip konstrukce spočívá v rozložení grafu na 2-faktory a popřípadě jeden 1-faktor. Pro zjednodušené grafy lze snadno nalézt společné dílčí pokrývací grafy. Hledaný graf je pak sjednocením těchto dílčích grafů.

Definice 5.1: Pro 1-regulární grafy H_1, H_2 definujeme operaci \otimes následovně:
 $G = H_1 \otimes H_2$,

$$V(G) = V(H_1) \times V(H_2),$$

$$((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \in E(G) \Leftrightarrow (u_1, v_1) \in E(H_1), (u_2, v_2) \in E(H_2)$$

Lemma 5.2: Pro 1-regulární grafy H_1, H_2 platí, že graf $G = H_1 \otimes H_2$ pokrývá jak graf H_1 , tak graf H_2 .

Důkaz: Z definice operace \otimes je graf G nutně 1-regulární. Zobrazení $f_1 : V(G) \rightarrow V(H_1), f_2 : V(G) \rightarrow V(H_2)$ popsaná vztahy $f_1((u, v)) = u, f_2((u, v)) = v$ jsou pokrytí triviálním ověřením podmínek. \square

Úmluva: V následujících definicích dvouregulární grafy H nemusí být souvislé.

Definice 5.3: Graf \vec{H} je cyklickou orientací dvouregulárního grafu H , když

$$V(\vec{H}) = V(H),$$

$$(u, v) \in E(H) \Leftrightarrow ([u, v] \in E(\vec{H}) \vee [v, u] \in E(\vec{H})),$$

a platí $\forall u \in V(\vec{H}) : \text{indeg}(u) = \text{outdeg}(u) = 1$.

Pozorování: Každý konečný dvouregulární graf má cyklickou orientaci.

Důkaz: Hrany grafu můžeme orientovat následujícím postupem. Vezměme za počáteční libovolný vrchol grafu, jednu incidentní hranu orientujme směrem ven z vrcholu a posuňme se po ní do sousedního vrcholu. V tomto vrcholu zbývá jen jedna hrana pro orientaci ven, proto ji použijeme a celý postup opakujeme znovu. Díky konečnosti grafu se jednou musíme znovu dostat do počátečního vrcholu. V každém kroku se nám snižuje počet vrcholů, jež nemají orientované obě incidentní hrany. Z počátečního vrcholu je jedna hrana orientovaná ven (první orientovaná hrana) a jedna dovnitř (poslední orientovaná hrana). Během konstrukce se nikdy nemůžeme dostat do vrcholu, jemuž již byla orientována alespoň jedna hrana směrem dovnitř. V takovém vrcholu jsme museli také orientovat další hranu směrem ven a spolu s hranou, po níž jsme se do tohoto vrcholu dostali, dostáváme spor s dvouregularitou grafu.

Tímto způsobem se nám podaří orientovat jednu komponentu grafu. Postup opakujeme s výběrem počátečního vrcholu z neorientované komponenty tak

dlouho, až získáme cyklickou orientaci celého grafu. \square

Definice 5.4: Pro dvouregulární cyklicky orientované grafy \vec{H}_1, \vec{H}_2 definuji operaci \otimes následovně: $\vec{G} = \vec{H}_1 \otimes \vec{H}_2$,

$$V(\vec{G}) = V(\vec{H}_1) \times V(\vec{H}_2),$$

$$[(u_1, u_2), (v_1, v_2)] \in E(\vec{G}) \Leftrightarrow [u_1, v_1] \in E(\vec{H}_1), [u_2, v_2] \in E(\vec{H}_2).$$

Lemma 5.5: Pro dvouregulární grafy H_1, H_2 platí, že pro libovolné cyklické orientace těchto grafů \vec{H}_1, \vec{H}_2 každý graf G vzniklý z grafu $\vec{G} = \vec{H}_1 \otimes \vec{H}_2$ zapomenutím orientace pokrývá jak graf H_1 , tak graf H_2 .

Důkaz: V grafech \vec{H}_1 a \vec{H}_2 platí, že do každého vrcholu vede jedna hrana a také jedna hrana z něj vychází. Proto podle definice operace \otimes v grafu \vec{G} do každého vrcholu vede jedna hrana a jedna z něj vychází. Pokrytí f_i pro $i = 1, 2$ pak můžeme definovat stejným způsobem jako u předchozího lemmatu. Podmínky (1) a (2) z definice pokrytí jsou splněny triviálně. Podmínka (3) $\forall (u, v), (u, w) \in E(G) : f_i(v) \neq f_i(w)$ je splněna také, neboť pokud by $f_i(v) = f_i(w)$, pak by se v obou grafech \vec{H}_i vyskytly orientované hrany $[f_i(u), f_i(v)], [f_i(v), f_i(u)]$, což je ve sporu s cyklickou orientací grafů \vec{H}_i . \square

Nyní máme připravena potřebná fakta pro ukázkou konstrukce na k -regulárních grafech. Naši konstrukci nejdříve podrobně rozebereme pro tříregulární grafy.

Lemma 5.6: Pro každé dva hranově dvousouvislé tříregulární grafy H_1, H_2 existuje graf G takový, že G pokrývá H_1 i H_2 .

Důkaz: Podle Petersenovy věty platí, že každý dvousouvislý 3-regulární graf má 1-faktor a tedy i 2-faktor. Označme 1-faktor grafu H_i symbolem P_i a 2-faktor symbolem C_i . Podle předchozích lemmat existují grafy G_P, G_C takové, že $V(G_P) = V(G_C) = V(H_1) \times V(H_2)$ a navíc G_P pokrývá oba grafy P_i a G_C pokrývá oba grafy C_i . Navíc vzhledem k tomu, že $E(P_i) \cap E(C_i) = \emptyset$, platí také

$E(G_P) \cap E(G_C) = \emptyset$. Hledaný graf G můžeme nyní definovat vztahy

$$V(G) = V(H_1) \times V(H_2), \quad E(G) = E(G_P) \cup E(G_C).$$

Graf G je 3-regulární a zobrazení f_i jsou pokrytí, neboť opět podmínky (1) a (2) platí triviálně a platnost podmínky (3)

- a) pro dvojici hran, jež se pomocí f_i zobrazí do stejného faktoru, vyplývá z předchozích lemmat,
- b) pro dvojici hran, z nichž se jedna zobrazí do P_i a druhá do C_i , vyplývá z faktu, že množiny $E(G_P)$ a $E(G_C)$ jsou disjunktní. \square

Lemma 5.7: *Pro každý tříregulární graf H existuje tříregulární hranově dvousouvislý G , který jej pokrývá.*

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že graf H je souvislý, pokud by nebyl, budeme z grafu H pokrývat jenom jednu komponentu.

Důkaz: Odeberme z hran grafu H z každé komponenty dvousouvislosti jednu hranu, tím nám zůstane množina hran E_+ a z odebraných hran vytvoříme množinu E_- . Graf $(V(H), E_+)$ je stále souvislý. Buď $V(G) = V(H) \times \{1, 2\}$. Vrcholy tvaru $(u, 1)$ pro srozumitelnost značíme u_1 . Dále

$$E(G) = \{(u_1, v_1), (u_2, v_2); (u, v) \in E_+\} \cup \{(u_1, v_2), (u_2, v_1); (u, v) \in E_-\}.$$

Symboly G_1 resp. G_2 dále označují podgrafy G indukované množinami vrcholů $V(H) \times \{1\}$ resp. $V(H) \times \{2\}$. Graf $G = (V(G), E(G))$ je hledaný graf. Zřejmě pokrývá graf H . Také je hranově dvousouvislý, neboť pokud by v grafu G existoval most (u_i, v_j) , pak:

- a) Předpokládejme, že $i = j$, (búno $i = 1$) a oba vrcholy u, v náležejí stejné komponentě dvousouvislosti grafu H . Potom v H spojuje vrcholy u a v kromě hrany (u, v) ještě jedna cesta, která může používat nejvýše jednu hranu $(w, w') \in E_-$. V grafu G pak vezmeme odpovídající cestu spojující u_1 a v_1 v G_1 a hranu

(w_1, w'_1) nahradíme hranou (w_1, w'_2) , cestou spojující vrcholy w_2 a w'_2 v podgrafu G_2 a hranou (w_2, w'_1) . Tím dostaneme cestu spojující u_1 a v_1 a spor s předpokladem, že hrana (u_1, v_1) je most.

b) Pokud $i = j$, (búno $i = 1$) a vrcholy u, v náležejí každému jiné komponentě dvousouvislosti H . Označme tyto komponenty C_u a C_v a hrany $(w, z) = C_u \cap E_-, (x, y) = C_v \cap E_-$. Pak v grafu G existují: cesta z u_1 do w_1 v G_1 , hrana (w_1, z_2) , cesta ze z_2 do x_2 v G_2 , hrana (x_2, y_1) a cesta z y_1 do v_1 v G_1 , což je cesta spojující u_1 a v_1 a spor.

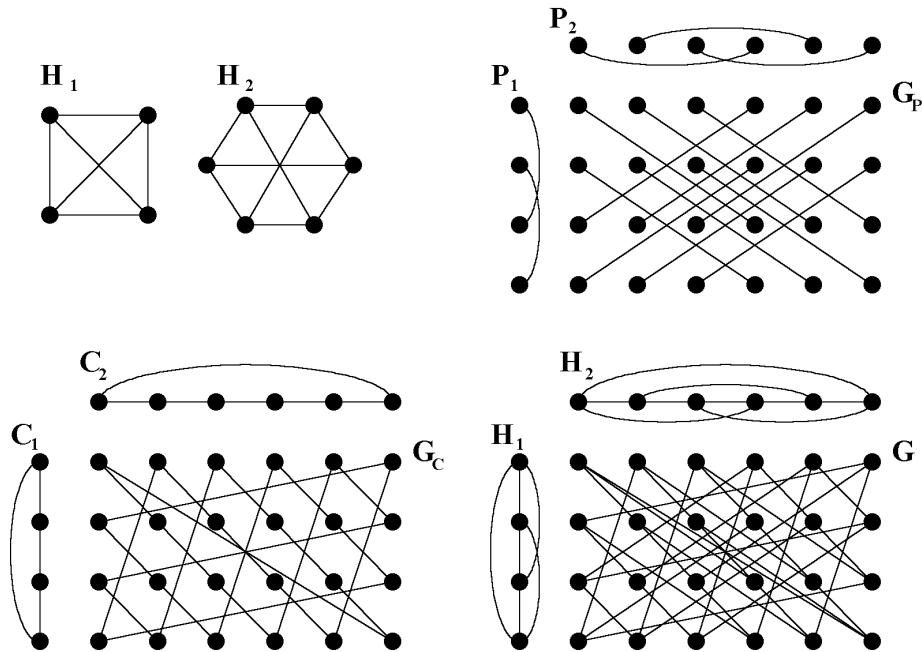
c) Pokud $i \neq j$ pak u_i je v G_i spojeno cestou s v_i , dále existují hrana (v_i, u_j) a cesta z u_j do v_j v G_j , což je opět cesta z u_i do v_j a spor. \square

Důsledek 5.8: Pro každé dva tříregulární grafy H_1 a H_2 , existuje graf G , který je oba pokrývá.

Důkaz: Není-li některý z grafů H_i hranově dvousouvislý, použijeme předchozí lemma pro konstrukci hranově dvousouvislého H'_i , který pokrývá H_i . Ten pak použijeme pro konstrukci grafu G podle lemmatu 6. Graf G pak pokrývá H'_i a díky tranzitivitě pokrytí pokrývá i H_i . \square

Na následujícím obrázku jsou pro tříregulární grafy H_1 a H_2 ukázány grafy C_1, C_2, P_1, P_2 a na jejich základě vytvořené grafy G_C, G_P a hledaný graf G , který pokrývá jak H_1 , tak H_2 .

V konstrukci pro k -regulární grafy používáme podobnou metodu jako pro tříregulární grafy. Při rozkladu tříregulárních grafů na 2-faktor a 1-faktor jsme použili Petersenovu větu a lemma pro konstrukci hranově dvousouvislých grafů. V konstrukci budeme potřebovat podobná lemmata pro k -regulární grafy, která nám umožní rozložit zkoumaný graf.



Obr. 1: Ukázka konstrukce grafu G

Lemma 5.9: *Je-li graf G $2k$ -regulární, potom obsahuje 2-faktor.*

Důkaz: (převzatý z [3]): Stupně vrcholů v grafu G jsou sudé, a tudíž v něm existuje Eulerův sled. Orientujeme-li hrany grafu G podél tohoto sledu, bude platit, že $\text{indeg}_G(v) = \text{outdeg}_G(v) = k$. Podle orientace grafu G vytvoříme pomocný bipartitní graf G' a to tak, že každý vrchol u grafu G rozdělíme na dva vrcholy u_{in} a u_{out} a každou orientovanou hranu $[u, v]$ nahradíme hranou $[u_{out}, v_{in}]$. Platí věta, že v každém regulárním bipartitním grafu existuje perfektní párování. Hrany perfektního párování v grafu G' odpovídají hranám 2-faktoru v grafu G , neboť pro vrchol u vede v párování právě jedna hrana do vrcholu u_{in} a právě jedna z vrcholu u_{out} , Odtud plyne, že do vrcholu u musí vést právě dvě hrany. \square

Pozorování: Každý $2k$ -regulární graf lze rozložit na k disjunktích 2-faktorů.

Důkaz: Aplikujeme-li předchozí lemma na k -regulární graf, získáme 2-faktor. Odebráním tohoto 2-faktoru obdržíme $2k - 2$ -regulární neboli $2 \cdot (k - 1)$ -regulární graf, na který můžeme opět aplikovat předchozí lemma. V každé aplikaci získáme jeden 2-faktor, tyto 2-faktory jsou navzájem disjunktí, neboť později vytvořené 2-faktory byly vytvářeny z grafů, jimž již byly odebrány hrany dříve vytvořených 2-faktorů. \square

Lemma 5.10: Je-li H $2k + 1$ -regulární graf, potom existuje graf G , který jej pokrývá a navíc obsahuje 1-faktor.

Důkaz: Položme $V(G) = V(H) \times \{1, 2\}$, vrcholy $(v, 1)$ dále značíme v_1 . Množina hran budiž

$$E(G) = \{(u_1, v_2), (u_2, v_1) : \forall (u, v) \in E(H)\}.$$

Zobrazení $f(v_i) = v$ je pokrytí grafu H grafem G . Graf G je bipartitní graf s partitami $V(H) \times \{1\}$ a $V(H) \times \{2\}$. Jak již bylo zmíněno, regulární bipartitní graf obsahuje 1-faktor. \square

Věta 5.11: Pro každé dva k -regulární grafy H_1 a H_2 existuje graf G , který pokrývá H_1 i H_2 .

Důkaz: Je-li k liché, zkonstruujeme podle předchozího lemmatu grafy H'_1, H'_2 , které pokrývají H_1 a H_2 a navíc obsahují 1-faktor.

Z grafu H'_i můžeme odebrat 1-faktor P_i a zbytek rozložit na $\frac{k-1}{2}$ 2-faktorů $C_{i,1}, \dots, C_{i,m}$, kde $m = \frac{k-1}{2}$. Podle lemmat 5.2 a 5.5 platí, že existují grafy G_P, G_{C_j} pro $j = 1, \dots, m$ takové, že $V(G_P) = V(G_{C_j}) = V(H'_1) \times V(H'_2)$ a G_P pokrývá oba P_i a každý G_{C_j} pokrývá $C_{1,j}$ i $C_{2,j}$. Pro hledaný G platí $V(G) = V(H'_1) \times V(H'_2)$ a $E(G) = E(G_P) \cup E(G_{C_1}) \cup \dots \cup E(G_{C_m})$. Stejným argumentem jako v lemmatu 5.6 lze dokázat, že G pokrývá jak H'_1 , tak H'_2 a díky tranzitivitě pokrytí i grafy H_1 a H_2 .

Je-li k sudé, je situace jednodušší. Každý z H_i můžeme rozložit na $\frac{k}{2}$ 2-faktorů $C_{i,1}, \dots, C_{i,m}$, $m = \frac{k}{2}$. Konstrukce i důkaz existence pokrytí je dále stejná jako pro lichá k , s tím, že jsou vynechány grafy P_i a G_P , neboť zde nemají smysl. \square

Na závěr lze podotknout, že uvedená konstrukce nám může posloužit k nalezení grafu, jenž pokrývá nejenom dvojici, ale i libovolnou n -tici H_1, \dots, H_n regulárních grafů. Existují dva způsoby řešení. Jednak můžeme konstrukci opakovat pro stále větší skupinu grafů: nejprve nalezneme graf G_1 , jenž pokrývá grafy H_1 a H_2 , potom nalezneme graf G_2 , jenž pokrývá H_3 a G_1 , a proto i H_1 a H_2 . Nakonec získáme graf G_{n-1} , jenž pokrývá všechny grafy H_1 až H_n .

Pro tento problém však existuje i elegantnější řešení. Stačí rozšířit operaci \otimes pro libovolný počet operandů následovně:

H_1, \dots, H_n značí n -tici 1-regulárních, resp. orientovaných 2-regulárních grafů.

$$G = \bigotimes_{i=1}^n H_i,$$

$$V(G) = V(H_1) \times \dots \times V(H_n),$$

pro 1-regulární grafy definuji:

$$((u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)) \in E(G) \Leftrightarrow (u_1, v_1) \in E(H_1), \dots, (u_n, v_n) \in E(H_n)$$

a podobně pro orientované 2-regulární grafy:

$$[(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)] \in E(G) \Leftrightarrow [u_1, v_1] \in E(H_1), \dots, [u_n, v_n] \in E(H_n).$$

Celou konstrukci pak můžeme provést rovnou pro n -tici grafů s použitím operace \otimes . Důkaz, že získaný graf má požadované vlastnosti, je pak analogický důkazu pro dvojici grafů.

Kapitola 6

Částečné pokrytí a solidní grafy

6.1 Částečné pokrytí

Připomeňme, že částečné pokrytí grafů se od úplného pokrytí liší pouze tím, že nepožadujeme, aby vrchol a jeho obraz měly stejné stupně. Ve třetí kapitole jsme často používali lemma 3.1, které nám za určitých podmínek umožnilo nalézt k danému vrcholu jeho vhodného souseda. Při studiu částečného pokrytí budeme často používat podobné lemma, jehož znění a důkaz zde uvádíme.

Lemma 6.1: *Bud' g částečné pokrytí $G \rightarrow H$, dále $u \in V(G)$, $v = g(u)$, $\deg_G(u) = \deg_H(v)$, $(v, v') \in E(H)$. Pak existuje právě jeden $u' \in V(G)$ tak, že $(u, u') \in E(G)$ a $f(u') = v'$.*

Důkaz: Stejným způsobem jako u lemmatu 3.1. Označíme-li $S_{G,u}$ podgraf v G , jež obsahuje všechny hrany vedoucí z vrcholu u (hvězda v G se středem u), potom je $f|_{V(S_{G,u})}$ bijekce na $V(S_{H,f(u)})$, a to proto, že vrcholy u a v mají stejný

stupeň. Vrchol $v' \in V(S_{H,f(u)})$ a hledaný vrchol u' je jeho vzorem. \square

Nyní dokážeme větu o ekvivalenci částečného a úplného pokrytí na grafech, jež se navzájem pokrývají,

Věta 6.2: *Pokrývá-li graf G graf H , potom každé částečné pokrytí je úplné pokrytí.*

Značení: Pro důkaz věty 6.2 a podpůrných lemmat značí f úplné pokrytí. Díky tomuto zobrazení budeme využívat fakt $R_G = R_H$. Zobrazení g je zkoumané částečné pokrytí.

Definice 6.3: *Pro vrchol $u \in V(G)$ definujeme $t^i(u)$ jako tíhu vrcholu u vzhledem k \mathcal{B}^i následovně $t^i(u) = j \Leftrightarrow u \in B_j^i$. Obdobně definujeme $t(u)$ jako tíhu vzhledem k \mathcal{B} .*

Lemma 6.4: *Pro vrchol $u \in V(G)$ platí $t_G(u) \geq t_H(g(u))$.*

Důkaz: Sporem. Nechť existuje u takový, že $t_G(u) < t_H(g(u))$. Označme $v = g(u)$. Stupeň vrcholu u nemůže být větší než stupeň vrcholu v , neboli $t_G^1(u) \geq t_H^1(v)$. Pro zachování nerovnosti musí platit $\deg_G(u) = \deg_H(v)$, neboli $t_G^1(u) = t_H^1(v)$. Podle definice uspořádání potom existuje k takové, že $t_G^k(u) = t_H^k(v)$, ale $t_G^{k+1}(u) < t_H^{k+1}(v)$, čili

$$(r_G(u)_m^k)_{m=1}^n >_{Lex} (r_H(v)_m^k)_{m=1}^n \quad n = |\mathcal{B}^k|.$$

Tedy existuje l , že

$$\forall m < l : r_G(u)_m^k = r_H(v)_m^k \text{ a } r_G(u)_l^k > r_H(v)_l^k.$$

Podle Dirichletova principu existují vrcholy

$$u', v' : (u, u') \in E(G), (v, v') \in E(H), v' = g(u')$$

a platí $t_G^k(u') \leq l < t_H^k(v')$. Tím je v podstatě proveden indukční krok od $k+1$ ke k . Indukcí získáme posloupnost vrcholů u, u', \dots, \bar{u} takovou, že $t_G^1(\bar{u}) < t_H^1(\bar{v})$, odkud

platí $\deg_G(\bar{u}) > \deg_H(f(\bar{u}))$, což je ve sporu s podmínkou (2) definice částečného pokrytí. \square

Lemma 6.5: Pro vrchol $u \in V(G)$ platí $t_G(u) \leq t_H(g(u))$.

Důkaz: Sporem. Nechť existuje u takový, že $t_G(u) > t_H(g(u))$. Z předchozího lemmatu mimo jiné plyne, že pro vrcholy $w \in B_{G,1}$ platí $t_G(w) = 1 = t_H(g(w))$. Vezměme libovolný takový w a libovolnou cestu $w = w_1, w_2, \dots, w_n = u$. Nalezneme nejmenší k takové, že $t_G(w_k) = t_H(g(w_k))$ a zároveň $t_G(w_{k+1}) > t_H(g(w_{k+1}))$. Pak podle Dirichletova principu existuje $\bar{w} : (w_k, \bar{w}) \in E(G)$, takové, že $t_G(\bar{w}) < t_H(g(\bar{w}))$, což je ve sporu s předcházejícím lemmatem. \square

Důkaz věty 6.2: Z předcházejících lemmat plyne, že za uvedených podmínek nutně pro všechny vrcholy $u \in V(G)$ platí: $t_G(u) = t_H(g(u))$. Odtud vzhledem ke shodnému stupňovému rozdělení grafů G a H plyne $t_G^1(u) = t_H^1(g(u)) \Rightarrow \deg_G(u) = \deg_H(g(u))$. Tím jsme dokázali podmínku (2) úplného pokrytí, a protože podmínky (1) a (3) jsou u obou definic shodné, musí být g úplné pokrytí. \square

6.2 Rozpuštění vrcholu

Definice 6.6: Rozpuštěním vrcholu u v grafu G získáme graf G_u s následujícími vlastnostmi: Označme $d = \deg_G(u)$ a v_1, \dots, v_d sousedy vrcholu u . Potom

$$V(G_u) = V(G) \setminus \{u\} \cup \{w_1, \dots, w_d\},$$

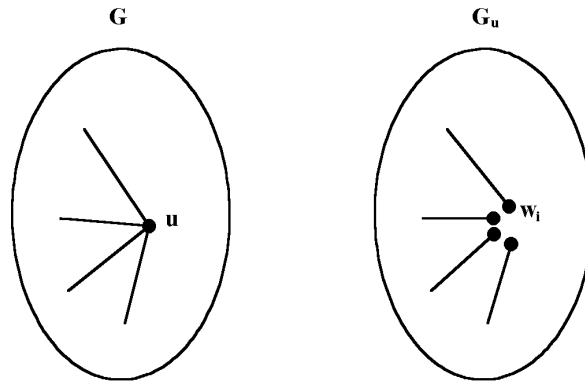
$$E(G_u) = E(G) \setminus \{(u, v_i) : i = 1, \dots, d\} \cup \{(w_i, v_i) : i = 1, \dots, d\}.$$

Vrcholy w_1, \dots, w_d dále nazýváme prameny rozpuštění.

Pozorování: Je-li zobrazení f pokrytí grafu H grafem G , potom zobrazení $f_u : V(G_u) \rightarrow V(H)$ definované vztahy: (se shodným značením jako v předchozí definici) $f_u(w_i) = f(u)$ a pro $v \neq w_i : f_u(v) = f(v)$, je částečné pokrytí grafu H grafem G_u .

Důkaz: Triviálním ověřením podmínek (1) až (3). \square

Definice 6.7: Částečné pokrytí $g : G_u \rightarrow H$ nazýváme rozšiřitelné na G , pokud je zobrazení $f : G \rightarrow H$ takové, že $f_u = g$ je pokrytí.



Obr. 1: Rozpuštění vrcholu u v grafu G

Pozorování: Je-li částečné pokrytí $g : G_u \rightarrow H$ rozšiřitelné na G , potom platí: $deg_G(v) = deg_H(g(v))$ pro $v \neq w_i$.

Důkaz: Plyne z definice f_u pro vrcholy $v \neq w_i$. □

Lemma 6.8: Částečné pokrytí $g : G_u \rightarrow H$ je rozšiřitelné právě tehdy, když

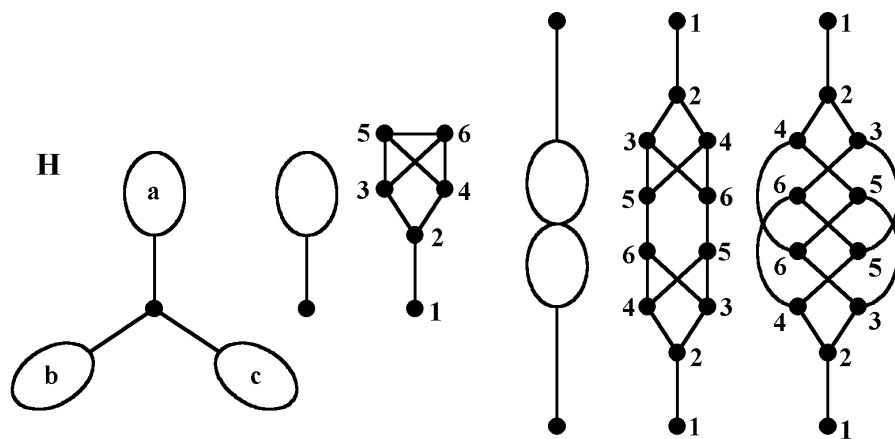
- (1) existuje vrchol v takový, že $deg_H(v) = deg_G(u)$ a $\forall w_i : g(w_i) = v$ a
- (2) jsou-li v_i vrcholy takové, že $(w_i, v_i) \in E(G_u)$, pak $g(v_i) \neq g(v_j)$ pro $i \neq j$.

Důkaz: Při nesplnění první podmínky není splněna podmínka (2) definice pokrytí, při nesplnění druhé neplatí podmínka (3) definice pokrytí. □

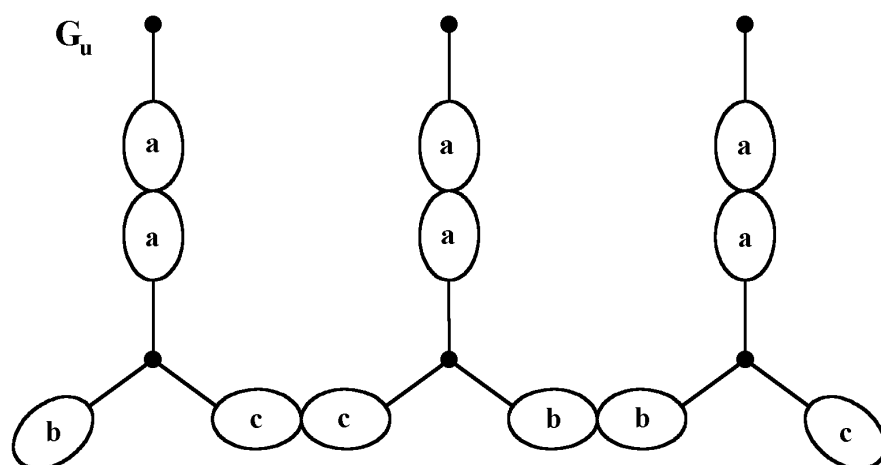
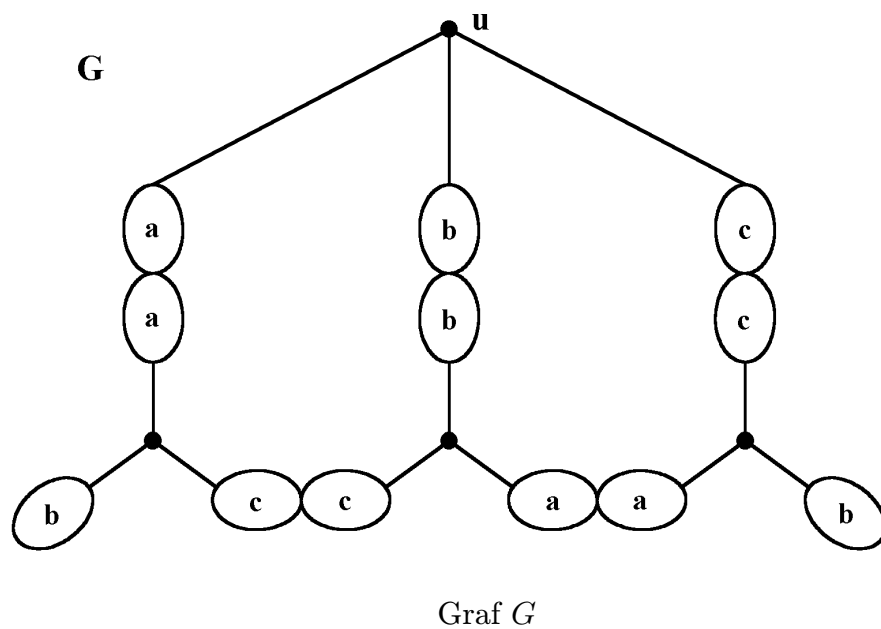
Příklad 6.9: Existují grafy G, H a vrchol $u \in V(G)$ takové, že graf G_u je souvislý a přitom existuje částečné pokrytí g_u , které není rozšiřitelné na G , i když splňuje podmínku (1) předchozího lemmatu.

Příklad takových tříregulárních grafů je na následujícím obrázku. Graf H je sestaven ze tří shodných částí, označených a, b a c , jež jsou spojeny hranou s centrálním vrcholem. Tyto části jsou znázorněny oválem, konkrétní ukázka části je uvedena vpravo od grafu H . Graf G je sestaven z 12 takových částí, některé části

k sobě přiléhají, čehož lze dosáhnout záměnou hran, popsanou ve třetí kapitole. Dva příklady přiléhání částí jsou taktéž ukázány vpravo od grafu H . Čísla udávají pokrytí, resp. částečné pokrytí z přiléhajících částí v grafu G , resp. G_u do grafu H . V grafu G je písmeny popsáno, na které části grafu H se zobrazí části grafu G , z čehož se dá snadno odvodit pokrytí. Souvislý graf G_u následuje za grafem G , částečné pokrytí je rovněž popsáno pomocí písmen. Z obrázku je zřejmé, že prameny se vždy zobrazí na centrální vrchol, a proto platí podmínka (1). Bohužel také sousedé pramenů se zobrazí na tentýž vrchol v části a grafu H , což je ve sporu s podmínkou (2), jak jsme chtěli ukázat.



Graf H , ukázka částí a přiléhání částí



Obr. 1: Ukázka nerozšiřitelného pokrytí na souvislém 3-regulárním grafu, graf G_u

6.3 Solidní a samosolidní grafy

Definice 6.10: Graf H nazýváme *solidní*, jestliže platí, že pro všechny grafy G pokrývající H a $\forall u \in V(G)$ jsou všechna částečná pokrytí $g : G_u \rightarrow H$ rozšiřitelná na G .

Stěžejním tématem této kapitoly bude zkoumání problému, jaké grafy H jsou solidní, a to především z hlediska hranové souvislosti. Nejprve se pokusíme zjistit některé nutné vlastnosti, které musí solidní grafy mít.

Pozorování: (Podmínky solidnosti) Graf H je solidní, pokud pro všechny grafy G pokrývající H a všechny vrcholy $u \in V(G)$ mají všechna částečná pokrytí $g : G_u \rightarrow H$ vlastnost:

- (1) $\exists v \in V(H) : deg_H(v) = d$ a pro prameny rozpuštění w_i platí: $g(w_i) = v$,
- (2) $\forall v_i, (w_i, v_i) \in E(G_u) : v_i \neq v_j \Leftrightarrow i \neq j$.

Důkaz: Přeformulací lemmatu 6.7. □

Příklad 6.11: Cykly C_k jsou solidní.

Důkaz: Je-li $H = C_k$, potom podle příkladu 3.9 pro každý graf G pokrývající H platí $G = C_{c \cdot k}$. Graf G_u je cesta délky ck . Očíslujeme-li vrcholy $V(G_u) = \{w_1 = v_1, v_2, \dots, v_{ck}, v_{ck+1} = w_2\}$ tak, že $(v_i, v_{i+1}) \in E(G_u)$, pak pro každé částečné pokrytí g platí: $g(v_i) = g(v_{i+k})$. Tím jsou splněny podmínky předchozího pozorování, neboť $g(w_1) = g(v_1) = g(v_{k+1}) = g(v_{2k+1}) = \dots = g(v_{ck+1}) = g(w_2) = v$ a zjevně také $deg_H(v) = 2$, čímž je podmínka (1) pro grafy C_k dokázána. Podmínka (2) platí ze vztahu $g(v_2) = g(v_{k+2}) \neq g(v_k) = g(v_{c+k})$. □

Definice 6.12: Graf H nazýváme *samosolidní*, pokud pro všechna u jsou všechna částečná pokrytí $g : H_u \rightarrow H$ rozšiřitelná.

Pozorování: Solidní grafy jsou samosolidní. Odtud dostáváme fakt, že grafy, které nejsou samosolidní, nejsou solidní.

Příklad 6.13: Příkladem samosolidních grafů jsou bipartitní grafy $K_{2,n}$. Pro jakékoliv pokrytí při rozpuštění vrcholu stupně 2 nebo n lze snadno odvodit, že

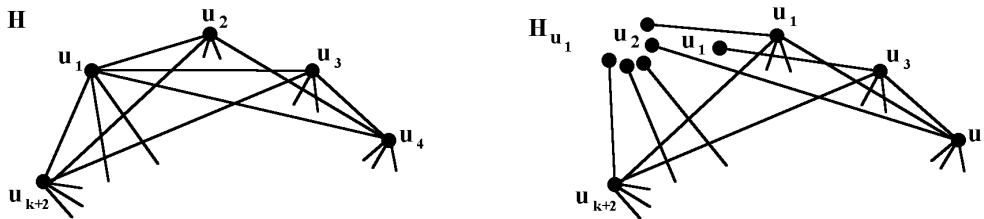
vzniknuvší prameny se musí zobrazit na tentýž vrchol a že nevzniká spor s podmínkou (2) solidnosti. Hlubším rozbořem lze ukázat, že tyto grafy jsou nejen samosolidní, ale též solidní.

Mohlo by se zdát, že se vzrůstajícími stupni vrcholů grafu by bylo obtížné vytvořit takové částečné pokrytí, které by dokazovalo, že graf není solidní. Následující příklad ukazuje konstrukci nesamosolidního grafu s libovolně velkým minimálním stupněm vrcholu.

Příklad 6.14: Pro každé $k \geq 2$ existuje graf H , který není samosolidní a minimální stupeň v grafu H je roven k .

Důkaz: Graf H zkonstruujeme z grafu K_{k+2} odebráním hrany (u_2, u_3) . Minimální stupeň grafu H je $\deg_H(u_2) = k$. V grafu H rozpustíme vrchol u_1 , čímž vzniknou vrcholy $w_{u_2}, \dots, w_{u_{k+2}}$. Definujeme částečné pokrytí $g : H_{u_1} \rightarrow H$ následovně: $g(w_{u_3}) = g(u_2) = u_1$, dále pro $i \neq 3 : g(w_{u_i}) = u_2$ a pro $i \geq 3 : g(u_i) = u_i$. Snadno lze ověřit, že g odpovídá definici částečného pokrytí a vzhledem k tomu, že $g(w_{u_3}) \neq g(w_{u_4})$, není graf H samosolidní. \square

Uvedená konstrukce grafu H je ilustrována na následujícím obrázku. Popisy vrcholů v grafu H_{u_1} udávají nerozšiřitelné částečné pokrytí grafu sebou samým.



Obr. 1: Nesamosolidní graf s minimálním stupněm vrcholu rovným k

Budeme se zabývat otázkou, jak snadno rozpoznat grafy, jež nejsou samosolidní, a tedy ani solidní. Následující dvě lemmata nám dávají nástroje pro rozpoznání některých nesamosolidních grafů.

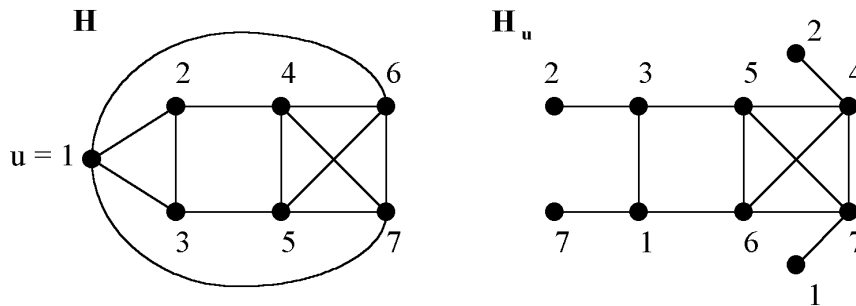
Lemma 6.15: Platí-li pro graf H , že v něm existují vrcholy u_1, u_2 takové, že

$\deg_H(u_1) > \deg_H(u_2)$ a $\forall u \in V(H) \setminus \{u_1, u_2\} : (u_2, u) \in E(H) \Rightarrow (u_1, u) \in E(H)$, potom graf H není solidní.

Důkaz: Konstrukcí podobnou příkladu 6.13 rozpustíme vrchol u_1 a definujeme částečné pokrytí g . Protože existuje vrchol u_3 , kde $(u_1, u_3) \in E(H)$, $(u_2, u_3) \notin E(H)$, bude $g(w_{u_1}) = u_2 \neq u_1 = g(w_{u_3})$, a proto graf H není solidní. \square

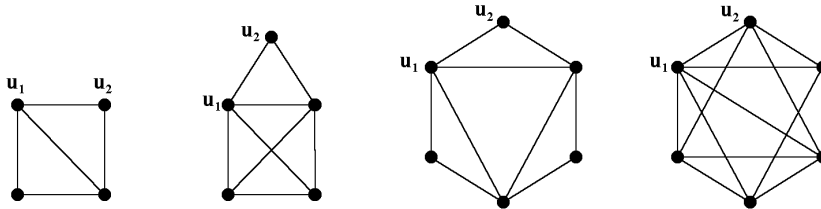
Na následujícím obrázku je ukázán jeden z nejmenších grafů, který není regulární a rozpuštění libovolného vrcholu není důvodem pro zamítnutí samosolidnosti podle předchozího lemmatu.

Tento relativně snadno ověřitelný fakt však nestačí pro dokázání samosolidnosti. Uvedený graf totiž není samosolidní, příklad nerozšiřitelného pokrytí je uveden na téže obrázku.



Obr. 1: Ukázka nesamosolidního grafu

Lemma 6.15 však není úplně bezcenné, jak se jeví z předešlého vyobrazení. Na dalším obrázku uvádíme příklad čtyř grafů, kde se aplikací lemmatu 6.15 snadno dokáže, že tyto grafy nejsou samosolidní a tedy ani solidní. V každém jsou vyznačeny vrcholy u_1, u_2 , jež odpovídají vrcholům ze znění lemmatu.



Obr. 1: Užití lemmatu 6.15

Příklad 6.16: Pokud v grafu H existuje artikulace u taková, že jedna z komponent vrcholové dvousouvislosti H_1 je podgrafem druhé komponenty H_2 , potom graf H není solidní.

Důkaz: Rozpustíme artikulaci u a částečné pokrytí $g : H_u \rightarrow H$ definujeme na vrcholech H_2 jako identitu a na vrcholech H_1 jako zobrazení na podgraf H_1 v komponentě H_2 . Prameny w vzniklé rozpuštěním artikulace u , zobrazíme na u . Částečné pokrytí g není rozšiřitelné na H , neboť existuje vrchol $u' \in V(H_1)$ takový, že hrany $(w_i, u'), (w_j, g(u'))$ se zobrazí na hranu $(u, g(u'))$, a proto by existence každého zobrazení $f_u = g$ byla ve sporu s podmínkou (3) definice pokrytí. \square

6.4 Věta o solidních regulárních grafech

Věta 6.17: Je-li $k \geq 3$, potom hranově $\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$ -souvislé k -regulární grafy jsou solidní.

V důkazu následujících lemmat je použito následující značení. H je zkoumaný hranově $\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$ -souvislý k -regulární graf. Graf G je libovolný souvislý graf, který H pokrývá. G je také hranově k -regulární a podle lemmatu 3.12 navíc hranově dvousouvislý graf.

Pro libovolný vrchol $u \in V(G)$ značí g částečné pokrytí $G_u \rightarrow H$.

Lemma 6.18: *Každý k -regulární hranově $\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$ -souvislý graf je vrcholově dvousouvislý.*

Důkaz: Sporem: Budiž u artikulace. Potom alespoň do jedné komponenty vede nejvýše $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ hran. Tyto hrany tvoří řez, což je ve sporu s $e\text{-}\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$ -souvislostí grafu. \square

Aplikací tohoto lemmatu získáme fakt, že graf H je vrcholově dvousouvislý. Bylo již dokázáno v lemmatu 3.15, že graf G , který graf H pokrývá, musí být také vrcholově dvousouvislý. Nyní lze odvodit, že graf G_u je souvislý. Pokud by nebyl, byl by vrchol u artikulací v původním grafu G , což je ve sporu s vrcholovou dvousouvislostí G .

Důkaz věty 6.17 rozdělíme na důkaz jednotlivých podmínek pro solidní grafy. Při důkazu první podmínky solidnosti se zaměříme na obrazy hran vedoucích z pramenů rozpuštění. Zkonstruujeme pomocný částečně orientovaný graf a rozborem možností vyloučíme všechny případy, kdy by se mohly prameny rozpuštění zobrazit na odlišné vrcholy. Situace pro grafy s lichým stupněm regularity je situace poněkud jednodušší, proto je rozebíráme jako první.

Při důkazu druhé podmínky solidnosti využijeme již dokázané platnosti první podmínky. Pro k hran vedoucích z pramenů pokrytí nalezneme v pokrývaném grafu k různých obrazů, na které se musí zobrazit, z čehož již vyplývá platnost druhé podmínky.

Lemma 6.19: *Je-li k liché, potom pro $e\text{-}\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$ -souvislé k -regulární grafy platí podmínka (1) z definice solidnosti.*

Důkaz: Sporem. Pro liché k platí $\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor = \frac{k+1}{2}$. Dále budiž g částečné pokrytí, jež nespĺňuje podmínku (1). Zkonstruujeme pomocné částečně orientované grafy H' , H'' a G'_u následovně:

$$V(H) = V(H')$$

$$\forall(w_i, u_i) \in E(G_u) : [g(w_i), g(u_i)] \in E(H') \quad \dots \text{orientované hrany}$$

$$\forall (u, v) \in E(G_u) \setminus \{(w_1, u_1), \dots, (w_k, u_k)\} :$$

$$\{[g(u), g(v)], [g(v), g(u)]\} \not\subset E(H') \Rightarrow (g(u), g(v)) \in E(H')$$

... neorientované hrany

V grafu H' mohou vzniknout dvojice protisměrně orientovaných hran spojujících dva vrcholy. Proto zkonstruujeme graf H'' , kde jsou tyto dvojice odstraněny. Ovšem díky této operaci musíme též upravit graf G_u , čímž vznikne graf G'_u . Pro začátek konstrukce položíme $V(H'') = V(H')$, $E(H'') = E(H')$, $V(G'_u) = V(G_u)$, $E(G'_u) = E(G_u)$. Pro orientovanou hranu $\vec{e} = [v_1, v_2] \in V(H'')$ označme:

$$h([v_1, v_2]) = |\{(w_i, u_i) : g(w_i) = v_1, g(u_i) = v_2\}|.$$

Pro dvojici opačně orientovaných hran $[v_1, v_2], [v_2, v_1] \in E(H'')$ platí jedna z následujících možností:

a) $h([v_1, v_2]) > h([v_2, v_1]) = l$, potom z grafu H'' odstraníme hranu $[v_2, v_1]$.

V grafu G_u existuje alespoň l hran $(w_{i_1}, u_{i_1}), \dots, (w_{i_l}, u_{i_l})$ takových, že platí $g(w_{i_m}) = v_1, g(u_{i_m}) = v_2$ a stejně tak l hran $(w_{j_1}, u_{j_1}), \dots, (w_{j_l}, u_{j_l})$ takových, že $g(w_{j_m}) = v_2, g(u_{j_m}) = v_1$. Hrany $(w_{i_1}, u_{i_1}), \dots, (w_{i_l}, u_{i_l}), (w_{j_1}, u_{j_1}), \dots, (w_{j_l}, u_{j_l})$ z grafu G'_u vyjmemme a nahradíme je hranami $(u_{i_1}, u_{j_1}), \dots, (u_{i_l}, u_{j_l})$. Odstraníme vrcholy $w_{i_1}, \dots, w_{i_l}, w_{j_1}, \dots, w_{j_l}$. Díky odstranění hran s prameny se hodnota $h([v_1, v_2])$ zmenší o l .

b) $h([v_1, v_2]) = h([v_2, v_1]) = l$, potom z grafu H'' odstraníme obě hrany $[v_1, v_2]$

a $[v_2, v_1]$ a nahradíme je neorientovanou hranou (v_1, v_2) . Dále jako v bodě a) nalezneme l dvojic hran vedoucích do pramenů, které z G'_u odstraníme a nahradíme hranou l hranami mezi vnitřními vrcholy G'_u .

Ke konstrukci je třeba podotknout: Zúžíme-li zobrazení g na množinu $V(G'_u)$, zůstává částečným pokrytím grafu G'_u grafem H . Graf H'' obsahuje alespoň jednu a nejvýše k orientovaných hran. Pro každou hranu (v, v') grafu H obsahuje graf H''

buď neorientovanou hranu (v, v') , nebo právě jednu orientovanou hranu z dvojice $[v, v'], [v', v]$.

Lemma 6.20: *Graf H'' splňuje alespoň jeden z následujících případů:*

1. *Graf H'' obsahuje cyklus s alespoň jednou orientovanou hranou.*
2. *Orientované hrany tvoří řez dělicí graf H'' na nejvýše tři komponenty.*

Důkaz: Buď $\vec{e} = [v_n, v_1]$ orientovaná hrana grafu H'' . Chceme-li zabránit vzniku cyklu s hranou \vec{e} , musí na každé cestě z v_1 do v_n být alespoň jedna hrana (v_i, v_{i+1}) nahrazena v grafu H'' orientovanou hranou $[v_{i+1}, v_i]$ zabraňující vzniku cyklu. Odtud plyne, že na každé cestě z vrcholu v_n do v_1 leží orientovaná hrana, a proto orientované hrany tvoří řez. Díky $\frac{k+1}{2}$ souvislosti grafu H musí v každé komponentě začínat nebo končit alespoň $\frac{k+1}{2}$ orientovaných hran. Označíme-li c počet komponent, platí vztah $c \cdot \frac{k+1}{2} \leq 2k$, z čehož plyne $c \leq 3$. \square

Výše uvedená příklady dále rozebíráme odděleně:

1. Uvažme cyklus $(v_1, v_2, \dots, v_n = v_0)$ v grafu H'' s orientovanou hranou $[v_n, v_1]$. V grafu G'_u potom zkonstruujeme nekonečný cyklus vrcholů (u_1, u_2, \dots) následovně: Z konstrukce grafu H'' plyne, že vrchol v_n je obrazem nějakého pramene w_i v grafu G'_u . Položme $u_1 = w_i$. Z pramene w_i vede právě jedna hrana, a to do vrcholu u_2 . Máme-li již hotovou cestu (u_1, \dots, u_j) délky $j-1$, můžeme ji prodloužit o jeden vrchol následovně: Platí $g(u_j) = v_l$, $\deg_{G'_u}(u_j) = \deg_{H''}(v_l)$ a podle lemmatu 6.1 existuje vrchol u_{j+1} takový, že $(u_j, u_{j+1}) \in E(G'_u)$ a $g(u_{j+1}) = v_{l+1}$. V cestě (u_1, u_2, \dots) se žádný vrchol grafu G'_u nemůže vyskytnout dvakrát, neboť uvážíme-li první výskyt jednoho vrcholu na různých pozicích $j_1, j_2 \geq 2$, je existence hran (u_{j_1-1}, u_{j_1}) a (u_{j_2-1}, u_{j_2}) ve sporu s podmínkou (3) definice částečného pokrytí. Vrchol u_1 má stupeň jedna, a proto by se v cestě mohl dvakrát vyskytnout až po druhém výskytu svého souseda — vrcholu u_2 . Na cestě se také nikdy nemůžeme dostat do vrcholu stupně jedna, a tím cestu ukončit. Do takového vrcholu vede v grafu G_u jenom jedna hrana

(u_i, w_i) , jíž v grafu H'' odpovídá hrana $[g(w_i), g(u_i)]$, neboli hrana orientovaná proti směru cyklu. V grafu H'' se nemůže vyskytnout dvojice protisměrně orientovaných hran, neboť jsme je odstraňovali v konstrukci grafu H'' z grafu H' , takže pohyb proti orientaci hrany nemůže nastat. Tímto argumentem byla dokázána existence nekonečné cesty v konečném grafu G_u , což je spor a případ 1. nemůže nastat. \square

2. Pro rozbor druhého případu si nejprve uvědomme následující fakta:
 - a) Můžeme uvažovat, že hrany spojující dvě komponenty vedou jen jedním směrem. Jinak můžeme vytvořit cyklus a použít spornost předchozí podmínky. Podobně můžeme vyloučit existenci cyklu, procházejícího několika komponentami.
 - b) Je-li jedna komponenta degenerovaná, neboli obsahuje jen jeden vrchol v , potom má graf H'' jen dvě komponenty s vrcholy $V(H'') \setminus \{v\}$ a $\{v\}$. Do degenerované komponenty musí vést všech k hran. Do jedné ze zbývajících komponent by vedlo nejvýše $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor = \frac{k-1}{2}$ hran, což nelze kvůli $\frac{k+1}{2}$ -souvvislosti grafu H .

Pro vrchol v z $V(H'')$ označme

$$V_v = \{u \in V(G'_u) : g(u) = v, \deg_{G'_u}(u) = \deg_{H''}(v)\}.$$

- c) Je-li $(v, v') \in E(H'')$ neorientovaná hrana, potom $|V_v| = |V_{v'}|$. Plyne z lemmatu 6.1., odvozením analogickým z důkazu lemmatu 3.10. Volně řečeno podle neorientované hrany vedoucí ze svého obrazu v H'' nalezneme každý vrchol v G'_u právě jednoho souseda.
- d) Je-li $[v, v'] \in E(H'')$ orientovaná hrana, potom $|V_v| + h([v, v']) = |V_{v'}|$. Plyne taktéž z lemmatu 6.1 navíc je třeba uvážit, že $h([v, v'])$ vrcholů z $V_{v'}$ má za souseda, jenž se zobrazí na vrchol v , jeden z pramenů w_i a ty se do množiny V_v nezahrnují.

e)

$$1 \leq \sum_{[v,v'] \in E(H'')} h([v,v']) \leq k$$

Toto číslo odpovídá počtu hran vedoucích z pramenů, které nebyly odebrány při vytváření grafu G'_u . Pramenů v grafu G_u bylo tolik, kolik je velikost stupně vrcholu, neboli k . Při konstrukci grafu G'_u jsme odebírali prameny vždy po páru, proto vzhledem k tomu, že k je liché, alespoň jeden pramen nebyl odebrán.

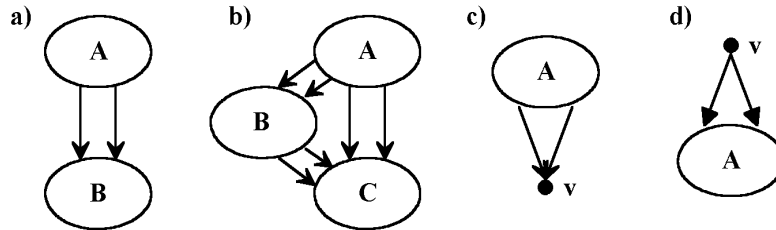
f)

$$\exists c \in \mathbb{N} : \sum_{v \in V(H'')} |V_v| = V(H'') \cdot c - 1$$

Z předpokladů a z důsledku 3.8 plyne $V(G) = c \cdot V(H)$. V grafu H'' jsou stupně všech vrcholů zachovány. V grafu G_u ubyl jeden vrchol stupně k a přibylo k vrcholů stupně jedna, přičemž některé z nich odstraníme při tvorbě grafu G'_u . Vrcholy stupně jedna se však do součtu $\sum |V_v|$ nezapočítávají, takže v součtu chybí pouze jeden rozpuštěný vrchol u .

g) Vedou-li orientované hrany \vec{e}_1, \vec{e}_2 z komponenty A do B , potom platí $h(\vec{e}_1) = h(\vec{e}_2)$. Plyne z faktů c) a d), neboť existují takové konstanty c_1 a c_2 , že pro všechny vrcholy v_1 komponenty A platí $|V_{v_1}| = c_1$, podobně pro všechny $v_2 \in B : |V_{v_2}| = c_2$ a odtud plyne $h[e_1] = c_2 - c_1 = h[e_2]$.

Z faktů a) a b) vyplývá, že orientované hrany dělí graf H'' na komponenty podle jednoho z následujících schémat:


 Obr. 1: Případy rozdělení grafu H''

- a) Orientovaných hran spojujících komponenty A a B je díky $\frac{k+1}{2}$ -souvvislosti grafu H alespoň $\frac{k+1}{2}$. Pro všechny hrany \vec{e} spojující A a B platí: $h[\vec{e}] = 1$, jinak bychom dostali spor s fakty e) a g). Zároveň však platí $|A| \geq 2$ a odtud $2 \leq |B| \leq |V(H)| - 2$ čímž dostáváme rovnost

$$\exists c \in \mathbb{N} : \sum_{v \in V(H'')} |V_v| = V(H'') \cdot c + |B|$$

jež je ve sporu s faktem f). Tento případ nemůže nastat.

- b) Pro trojici vrcholů $v_A \in V(A), v_B \in V(B), v_C \in V(C)$ platí nerovnosti $|V_{v_A}| < |V_{v_B}|, |V_{v_B}| < |V_{v_C}|$, odtud tedy pro každou hranu \vec{e}_{AC} spojující komponenty A a C platí $h(\vec{e}_{AC}) \geq 2$. Označme E_{AB}, E_{AC} , resp. E_{BC} množiny hran vedoucích mezi komponentami A a B, B a C , resp. A a C . Díky $\frac{k+1}{2}$ -souvvislosti grafu H platí $E_{AB} + E_{AC} \geq \frac{k+1}{2}, E_{BC} + E_{AC} \geq \frac{k+1}{2}$. Zde můžeme odvodit nerovnost

$$\begin{aligned} \sum_{[v, v'] \in E(H'')} h([v, v']) &\geq \sum_{\vec{e} \in E_{AB}} h(\vec{e}) + \sum_{\vec{e} \in E_{AC}} h(\vec{e}) + \sum_{\vec{e} \in E_{BC}} h(\vec{e}) \geq \\ &\geq |E_{AB}| + 2|E_{AC}| + |E_{BC}| \geq \\ &\geq 2 \cdot \frac{k+1}{2} = k+1, \end{aligned}$$

jež je ve sporu s faktem e). Tento případ také nemůže nastat.

- c) Stejným argumentem jako v případě a) odvodíme, že do vrcholu v vede k hran \vec{e} takových, že $h(\vec{e}) = 1$, a získáme rovnost

$$\exists c \in \mathbb{N} : \sum_{v \in V(H'')} |V_v| = V(H'') \cdot c + 1,$$

jež je ve sporu s faktem f). Tento případ nemůže nastat.

- d) Tento případ odpovídá situaci, kdy všechny prameny se zobrazí na jeden vrchol.

Rozborem případů jsme ukončili důkaz lemmatu 6.18. \square

Lemma 6.21: *Je-li k sudé, pak pro $e-\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$ -souvislé k -regulární grafy platí podmínka (1) z definice solidnosti.*

Důkaz: Pro sudé k platí $\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor = \frac{k+2}{2}$. Uvědomme si, proč bylo důležité, aby vrcholy grafu H měly lichý stupeň. Při konstrukci grafu H'' jsme odstraňovali dvojice opačně orientovaných hran a při té příležitosti jsme v grafu G'_u odstranili sudý počet pramenů. Výsledkem bylo, že v grafu H'' zůstala alespoň jedna orientovaná hrana a v grafu G'_u alespoň jeden pramen. Pro regulární grafy se sudými stupni vrcholů by mohl nastat případ, že by se nám podařilo odstranit všechny orientované hrany (a tedy i všechny prameny) a graf H'' by byl shodný s původním grafem H . I pro takový případ však stále platí argumenty c) a f) z důkazu předchozího lemmatu. Z faktu c) plyne

$$\sum_{v \in V(H'')} |V_v| = V(H'') \cdot |V_v| = V(H'') \cdot c,$$

což je ve sporu s faktem f). Pokud nám při konstrukci grafu H'' zůstane alespoň jedna orientovaná hrana, můžeme provést rozbor případů stejně jako u k -regulárních grafů s lichými k . Změna $\frac{k+1}{2}$ -souvislosti na $\frac{k+2}{2}$ -souvislost nám platnost argumentů použitých v rozboru případů a) až d) nijak neoslabí. \square

Bezprostředním důsledkem lemmat 6.19 a 6.21 je fakt, že hranově $\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$ -souvislé k -regulární grafy splňují podmínku (1) solidnosti.

Lemma 6.22: *Bud' H vrcholově dvousouvislý k -regulární graf, $v \in V(H)$, v_1, \dots, v_k sousedé vrcholu v . Potom existuje vrchol $v' \in V(H)$ takový, že vrchol v spojuje s vrcholem v' celkem k cest takových, že i -tá cesta C_i začíná hranou (v, v_i) .*

Důkaz: Odstraníme-li z grafu H vrchol v , zůstane souvislý. V tomto grafu existuje $k - 1$ cest spojujících vrchol v_i s v_k pro $i = 1, \dots, k - 1$. Položíme-li $v' = v_k$, získáme cestu C_i přidáním hrany (v, v_i) na začátek cesty spojující vrcholy v_i a v' . Tím dostaneme $k - 1$ hledaných cest, poslední cestu C_k tvoří hrana (v, v') . \square

Lemma 6.23: *U hranově $\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$ -souvislých k -regulárních grafů je podmínka (2) solidnosti splněna.*

Důkaz: Již jsme dokázali platnost podmínky (1), a proto můžeme v grafu H označit $v = g(w_1) = \dots = g(w_k)$. Dále budiž v' vrchol a C_1, \dots, C_k cesty podle předchozího lemmatu. V grafu G_u označme modře všechny vrcholy x , pro něž $g(x) = v'$ a podobně červeně takové y , že $g(y) = v$. Všechny modré vrcholy mají stupeň k , mezi červenými je k vrcholů stupně jedna a ostatní jsou stupně k . Pro libovolný modrý vrchol u' lze aplikací lemmatu 6.1 nalézt k cest vedoucích do u' z červených vrcholů, jež se zobrazí na cesty C_1, \dots, C_k . Ze žádného červeného vrcholu nemohou vést dvě různé cesty, které by se zobrazily na jednu cestu C_i , neboť v prvním vrcholu, kde by se tyto cesty lišily, bychom dostali spor s lemmatem 6.1.

V každém červeném vrcholu stupně jedna (to jsou prameny w_j) začíná cesta, jež se zobrazí na nějakou C_i . V každém modrém vrcholu končí k cest, každá se zobrazí na jinou C_i , v červených vrcholech stupně k začíná k cest, každá se také zobrazí na jinou C_i . Odtud pro každou dvojici pramenů w_{j_1}, w_{j_2} musí platit, že obrazy cest v nich začínajících, to jest cesty C_{i_1} a C_{i_2} , splňují podmínku $i_1 \neq i_2$. Cesty C_{i_1} a C_{i_2} začínají různými hranami, a proto se hrany (w_{j_1}, u_{j_1}) a (w_{j_2}, u_{j_2}) zobrazí na odlišné hrany, čili $g(u_{j_1}) \neq g(u_{j_2})$, což bylo dokázat. \square

Důkaz Věty 6.17.: Plyne okamžitě z lemmat 6.19 a 6.21 a 6.23. \square

Na tomto místě by bylo vhodné poznamenat, že hranová $\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$ -souvislost zkoumaného grafu byla zapotřebí při důkazu první podmínky solidnosti, a to pouze při rozboru čtyř možností a) až d). Ve zbylé části důkazu jsme využívali pouze vrcholové dvousouvislosti zkoumaného grafu (která podle lemmatu 6.18 plyne z hranové $\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$ -souvislosti). Je možné, že použitím jiné metody bude dokázáno, že pro solidní regulární grafy je postačující pouze vrcholová dvousouvislost.

Na závěr této kapitoly ukážeme konstrukci hranově $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ -souvislého k -regulárního grafu, který není solidní, čímž dokážeme adekvátnost požadavku $\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$ -souvislosti pro solidní grafy (z hlediska hranové souvislosti).

Lemma 6.24: *Pro každé k dělitelné čtyřmi, existuje k -regulární hranově $\frac{k}{2}$ -souvislý graf H_k , který není samosolidní.*

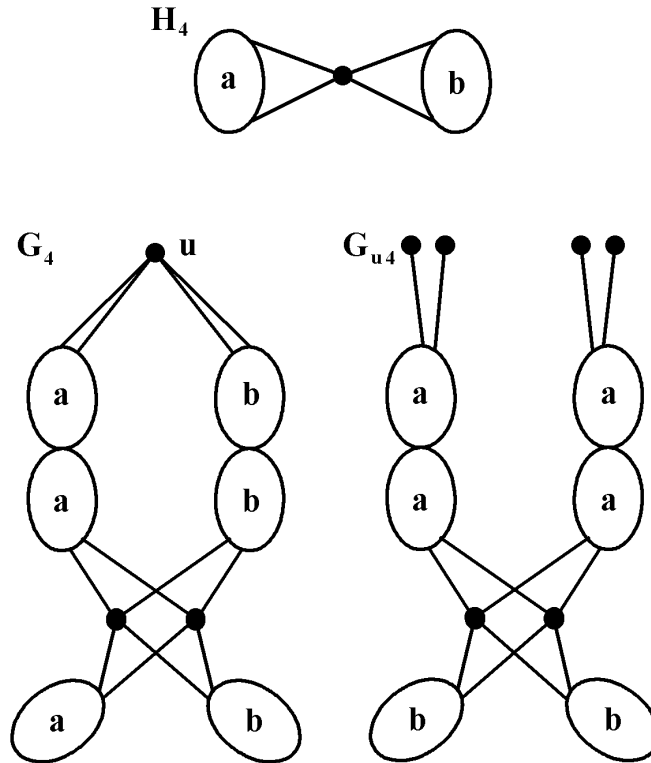
Důkaz: Pro $k = 4$ je příklad takového grafu uveden na následujícím obrázku. Graf H_4 sestává ze dvou shodných částí (každá část je e-dvousouvislá) spojených artikulací. Graf H je e-dvousouvislý, neboť části jsou dvousouvislé a nejmenší řez spojující obě části má 2 hrany, neboli hrany vedoucí z artikulace do libovolné části. Grafy G_4 a G_{u4} jsou popsány dále, přiléhání částí je sestrojeno podle stejného principu jako u příkladu 6.9, čili záměnou zaměnitelných hran. Pomocí písmen je popsáno jak pokrytí grafem G_4 , tak nerozšiřitelné pokrytí grafem G_{u4} .

Při konstrukci grafu pro ostatní k budeme vycházet z grafu H_4 . Nechť pro zkoumané k platí $k = 4l$. Zkonstruujeme pomocný graf E následujícím způsobem:

$$V(E) = V(K_{k+1}) \cup \{v, v'\},$$

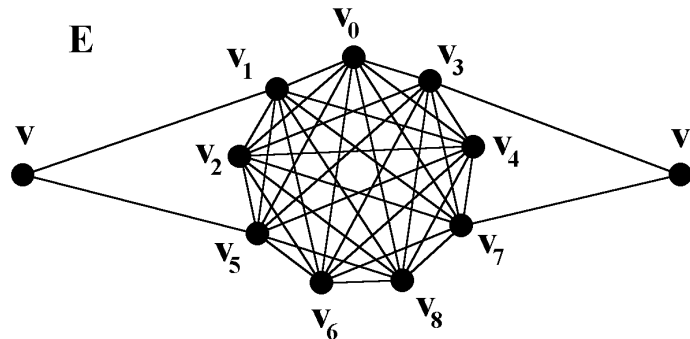
očíslovme vrcholy K_{k+1} od v_0 do v_k , potom

$$E(E) = E(K_{k+1}) \setminus \{(v_{4i-3}, v_{4i-1})\} \cup \{(v, v_{4i-3}), (v_{4i-1}, v')\} \text{ pro } i = 1, \dots, \frac{k}{4}$$


 Obr. 1: Grafy H_4 , G_4 a G_{u4}

Příklad grafu E pro $k = 8$ je uveden na následujícím obrázku. Kromě vrcholů v, v' mají všechny vrcholy grafu E stupeň k a lze snadno ověřit, že vrcholy v a v' spojuje $\frac{k}{4}$ hranově disjunktních cest, například $(v, v_{4i-3}, v_{4i-2}, v_{4i-1}, v')$ pro $i = 1, \dots, \frac{k}{4}$.

Hledaný graf H_k vznikne z grafu H_4 nahrazením každé hrany $e = (v, v')$ grafem E . Graf nahrazující hranu e značíme E_e . Podobně v grafech G_4 a G_{u4} nahradíme každou hranu grafem E , čímž získáme grafy G_k a G_{uk} . Pokrytí a nerozšiřitelné částečné pokrytí je třeba rozšířit na přidané vrcholy. Zobrazení na původních vrcholech zůstávají beze změn.

Obr. 1: Graf E pro $k = 8$

Pro oddělení libovolné vnitřní části některého grafu E_e je zapotřebí alespoň $\frac{k}{2}$ hran. Navíc řez oddělující dva původní vrcholy by musel být sjednocením řezů na těch E_e , pro něž by se koncové vrcholy hrany e ocitly v různých komponentách. Takové hrany musí být díky e -dvousouvislosti grafu H_4 alespoň dvě, navíc každý E_e je $\frac{k}{4}$ -souvislý, z čehož plyne, že každý řez v H_k má alespoň $\frac{k}{2}$ hran. Graf H_k je k -regulární a e - $\frac{k}{2}$ -souvislý.

Díky existenci nerozšířitelného pokrytí z G_{uk} na H_k je graf H_u hledaný neso-
lidní graf. □

Kapitola 7

Závěr

Hlavním cíl této práce spočíval v průzkumu solidních grafů z hlediska hranové souvislosti. Podařilo se dokázat, že požadavek hranové $\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$ souvislosti je asymptoticky optimální pro k -regulární grafy.

Z tohoto faktu pak podle [2] odvozují, že pro $k > 2$ třída $\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$ -souvislých k -regulárních grafů obsahuje grafy, pro něž patří problém H -COVER do třídy NP-úplných problémů. Není bez zajímavosti, že tato třída obsahuje i strnulé grafy, jeden z příkladů takového grafu je na obr. 5.

Dále jsem v této práci zkoumal vlastnosti pokrytí a částečného pokrytí grafů. Poznáním konceptu stupňového rozdělení grafu a lze odvodit, že třída grafů H , pro jejichž matice rozdělení a sousednosti platí $A_H = R_H$, obsahuje grafy, pro něž je problém H -COVER řešitelný v polynomiálním čase. Matici rozdělení grafu G lze spočítat při vytváření stupňové ekvivalence vrcholů. Ekvivalence je třeba zjemňovat v nejvýše $V(H)$ etapách, a v každé etapě je třeba prozkoumat všechny

vrcholy grafu včetně příslušnosti jejich sousedů do tříd ekvivalence. Pomine-li se časová náročnost třídění vrcholů a režie pro udržování datové struktury stupňové ekvivalence, získá se čas $O(E(G) \cdot V(G) \cdot V(H))$, neboli polynom vzhledem k počtu vrcholů grafu G , neboť graf H je pro problém H -COVER konstantní. Při započtení polynomiálního času pro třídění vrcholů a režii pro udržování datové struktury stupňové ekvivalence se stupeň polynomu celkového času zvýší o konstantu, čímž celkový čas zůstane polynomiální.

K dalším teoreticky zajímavým tvrzením odvozeným v této práci patří zjištění, že při existenci pokrytí mezi dvěma souvislými grafy je každé částečné pokrytí zároveň úplným pokrytím.

Při zkoumání hranové souvislosti jsem uvedl několik protipříkladů grafů, které však nebyly vrcholově dvousouvislé a ani samosolidní grafy. Na základě tohoto pozorování se okusím formulovat doposud otevřené problémy.

Prvním z otevřených problémů je vrcholová souvislost k -regulárních solidních grafů. Vedlejším výsledkem našich úvah byl fakt, že každý hranově $\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$ -souvislý graf je zároveň vrcholově dvousouvislý. Naskytá se otázka, zda existuje vrcholově dvousouvislý regulární graf, který není solidní, nebo zda všechny takové grafy jsou zároveň solidní.

Otevřeným problémem pro hlubší analýzu zůstává vztah samosolidních grafů a solidních grafů.

Literatura

- [1] *Biggs N. L.*: Algebraic Graph Theory. Cambridge University Press 1974.
- [2] *Kratochvíl J., Proskurowski A., Telle J. A.*: Covering regular graphs.
- [3] *Lovász L.*: Combinatorial Problems and Exercises. Akadémiai Kiadó, Budapest 1979.
- [4] *Nešetřil J.*: Teorie grafů. Praha SNTL 1979.
- [5] *Schrijver A.*: Packings and Coverings in Combinatorics. Math. Centrum, Amsterdam, 1980.