

DISKRÉTNÍ MATEMATIKA (NDMI002)

Cvičení 08.11.2013

Příklad 1. Kolik je celkem ekvivalencí na n -prvkové množině?

Příklad 2. Vinař má 3 lahve s různými odrůdami vína, na které nalepil etikety v náhodném pořadí. Jaká je pravděpodobnost, že právě/alespoň k lahví má správnou etiketu?

Příklad 3. (Mincovní hody.) Pojďme hodit n -krát spravedlivou mincí. Jaká je pravděpodobnost, že padlo právě k hlav? Jaká je pravděpodobnost, že počet hlav je sudý? Jaká je pravděpodobnost, kdybychom měli minci ne až tak spravedlivou (tzn. hlava padá s pravděpodobností p , orel $1 - p$).

Věta 1 (Věta o úplné pravděpodobnosti). *Nechť B_1, \dots, B_n je rozklad Ω (jsou navzájem disjunktní a jejich sjednocení je rovno Ω). Pak*

$$P[A] = P[A | B_1]P[B_1] + P[A | B_2]P[B_2] + \dots + P[A | B_n]P[B_n]$$

Příklad 4. Sousedům se narodily dvě děti a vy víte, že jedno z nich se jmenuje Pepíček. Jaká je pravděpodobnost, že i druhé z nich je kluk? (Předpokládejme, že každé dítě se narodí náhodně s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ jako kluk.)

Příklad 5. Nechť jsou A a B náhodné jevy s $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ a $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$. Najděte následující:

[a]. $P(A|B)$

[b]. $P(B|A)$

[c]. $P(\bar{A}|B)$

[d]. $P(A|\bar{B})$

[e]. $P(\bar{A}|\bar{B})$

Věta 2 (Bayesova věta). *Nechť B_1, \dots, B_n je rozklad Ω . Pak*

$$P[B_i | A] = \frac{P[A | B_i]P[B_i]}{\sum_{j=1}^n P[A | B_j]P[B_j]}$$

Příklad 6. Od června 2013 víme, že nás všechny sleduje americká bezpečnostní agentura NSA (čte naše emaily, odposlouchává skype hovory atd.). Smyslem jejich počínání je (údajně) hledat teroristy; pomocí počítačového algoritmu se snaží najít „podezřelé“ jedince.

Buďme k nim shovívaví a řekněme, že jejich test je velmi přesný – selže jen v 1% případech. Dejme tomu, že v USA žije 300 miliónů lidí a z nich 300 jsou teroristé. Jaká je pravděpodobnost, že algoritmem označený člověk není terorista?

Příklad 7. (Co byste čekali od šatnářky?) Ctihodní pánové v počtu n ... (to už známe a umíme!) Nechme ale přiřadit šatnářku dle její libosti a spočítáme si její očekávanou hodnotu (tj. kolik pánů při náhodné permutaci klobouků obdrží svůj klobouk).