12) Komplexní čísla.

Komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ je

- $z = a + ib$, kde a a b jsou reálná čísla (**reálná a imaginární část**) a i je imaginární jednotka splňující $i^2 = -1$
- bod (vektor) v rovině; a a b jsou jeho souřadnice v reálné a komplexní ose

Goniometrický tvar: Bod (vektor) také můžeme popsat polárními souřadnicemi. U komplexních čísel se délce vektoru z říká **absolutní hodnota** a značíme ji $|z|$. Úhlu se říká argument a bývá značen ϕ. Pak můžeme psát $z = |z|(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$.

S komplexními čísly můžeme pracovat podobně jako s reálnými, jen je to náročnější, ale přináší to i výhody (viz poslední bod):

- Dělení komplexním číslem — zlomek roznásobíme číslem komplexně sdruženým se jmenovatelem (tj. číslem $\bar{z} = a - ib$). Proč to pomůže viz příklad 1.
- Mocnění komplexního čísla z reálným číslem r si popíšeme pro z v goniometrickém tvaru: absolutní hodnota se umocní na r-tou a argument se r-krát zvětší
- **Odmocnění** děláme opačným postupem k mocnění — pro n přirozené je absolutní hodnota n-té odmocniny z je r-tá odmocnina $|z|$ a argumenty jsou úhly velikostí $\phi/n + 2k\pi/n$ pro k přirozená. Každé komplexní číslo má tedy právě n různých n-tých odmocnin.
- Mocnění komplexním číslem — využijeme $e^{ib} = \cos(b) + i\sin(b)$
- Mocnění komplexního čísla komplexním číslem - využijeme $e^{i\pi/2} = i$ a mocníme levou stranu. Pozor: Není jednoznačné, protože $i = e^{i\pi/2} = e^{i\pi/2+2\pi} \ldots$
- I goniometrické funkce (sin, cos a spol.) lze zobecnit na komplexní čísla, ale o tom třeba příště.
- Polynom stupně d nad $\mathbb{C}$ má vždy právě d komplexních kořenů (počítáno s násobnostmi)

1. Dokažte, že pro komplexní číslo z platí
   (a) $|z|^2 = z\bar{z}$
   (b) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, pokud $z \neq 0$
2. Spočítejte
   (a) $(5 - 6i) + (3 + 2i) =$
   (b) $\left(4 - \frac{1}{2}i\right) - \left(9 + \frac{5}{2}i\right) =$
   (c) $(2 + 5i)(4 - i) =$
   (d) $(1 - 2i)(8 - 3i) =$
   (e) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$
   (f) $\frac{3+2i}{3-2i} =$
   (g) $i^3 =$
   (h) $i^{100} =$
   (i) $\frac{1+4i}{3+2i} =$
   (j) $\frac{3+2i}{1-3i} =$
   (k) $\frac{1}{1+i} =$
   (l) $(3 - 2i)^{-1} =$

3. Dokažte, že při násobení dvou komplexních čísel se jejich absolutní hodnoty násobí a argumenty sčítají.
4. Najděte všechna řešení rovnic nad $\mathbb{C}$ (kvadratické polynomy řešte jako v $\mathbb{R}$, jediná změna je při dělení a odmocňování)
   - $x^2 + 2x + 2 = 0$
   - $x^2 + 2ix + 1 = 0$
   - $x^6 - 1 = 0$
   - $x^3 - 8i = 0$
   - $x^2 + 2ix + \sqrt{3}i = 0$
5. Určete reálné a imaginární části u
   (a) $(3 + 4i) + i(4 + 5i) + (2 + 3i)(4 + 5i)^2$
   (b) e^{3+4i}
   (c) $\sqrt{1 + 2i}$
   (d) $\ln(3 + 4i)$
   (e) i^i