Závěrečné domácí úkoly z Kombinatoriky a grafů - stav z 22. května 2012

Všechna svá tvrzení řádně zdůvodněte, a to i v případě, že to u úlohy není výslovně uvedeno. Můžete bez důkazu používat tvrzení z přednášky a cvičení, vždy ale napište znění tvrzení, které používáte.

1. Rozhodněte, zda pro každou dvojici přirozených čísel $k, n \geq 1$ platí
$$(kn)! \geq (k!)^n$$
a zda platí
$$(k!)^n \geq n^k.$$
[2]

2. U každé části této úlohy můžete použít výsledků předchozích částí této úlohy, a to i v případě, že je nemáte dokázané.
Dokažte, že:
   (a) Pro každou dvojici kladných přirozených čísel m, t a každé prvočíslo p platí, že pokud $\prod_{k=1}^{m} k$ je dělitelné p^t, pak je $\prod_{k=1}^{2m} k$ dělitelné p^{2t}. [2]
   (b) Pro každé přirozené číslo m je součin všech prvočísel mezi $m+1$ a $2m$ nejvýše $(2m)!/(m!)^2$. [2]
   (c)
$$\forall l \geq 0 : \prod_{i=1}^{i=l} \binom{2^i}{2^{i-1}} \leq 2^{2^{l+1}}.$$
[2]
   (d) Součin všech prvočísel mezi 1 a m je nejvýše 2^{4m}. [2]

3. Rozhodněte, zda pro každou dvojici přirozených čísel $k, n \geq 1$ splňující $n \geq 3k$ platí
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} \leq 2\binom{n}{k}.$$
[2]

4. Kolik čísel z $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ není dělitelných žádným z čísel $6, 22, 36, 101$? [2]

5. Pro každé $n \geq 1$ spočítejte počet perfektních párování v úplném grafu K_n a v úplném bipartitním grafu $K_{n,n}$. [2]

6. Najděte explicitní vzorec pro n-tý člen posloupnosti zadané rekurencí
   (a)
$$a_0 = 3 \quad a_n = 2a_{n-1} + 3 \text{ pro } n \geq 1$$
[2]
   (b)
$$a_0 = 1 \quad a_1 = 3 \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \text{ pro } n \geq 2$$
[2]

(c)

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_n = 2a_{n-1} - 4a_{n-2} \text{ pro } n \geq 2$$

[2]

7. Najděte explicitní vzorec pro počet posloupností délky n tvořených písmeny a, b, c, d, ve kterých se a a b nevyskytují těsně vedle sebe. [4]

8. Najděte vytvořující funkce následujících posloupností:

   1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8 ... (tj. $a_n = (-1)^n(n+1)$)

   2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32 ... (tj. $a_n = 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$) [2]

9. Pro každou z následujících funkcí napište vzorec pro n-tý člen posloupnosti, jejíž je vytvořující funkcí.

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 + x - 2} \qquad f_2(x) = \frac{7x}{32 - x^5}$$

[2]

10. Dokažte, že Fibonacciho čísla splňují následující rovnost:

$$\forall n \geq 2 : F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n.$$

[3]

11. Ve frontě na lístky po 100 Kč stojí $2n$ lidí, z nichž n má 100 Kč bankovku a n 200 Kč bankovku. Kasa je na začátku prázdná. Kolik je možností seřazení lidí takových, že pokladní bude mít pro každého diváka s 200 Kč bankovkou nazpět? Např., když $n = 2$, Alena a Bernard mají po 100 Kč a Cyril a David po 200 Kč, je takových možností 8: $ABCD$, $ABDC$, $ACBD$, $ADBC$, $BACD$, $BADC$, $BCAD$ a $BDAC$.

    Určete také pravděpodobnost, že pokladní bude mít pro každého nazpět. [2]

12. Pro každou dvojici přirozených čísel n, k splňující $n \geq k \geq 0$ definujme $c_{n,k}$ jako

$$c_{n,0} = 1 \qquad \text{pro každé } n \geq 0$$
$$c_{n,n} = c_{n,n-1} \qquad \text{pro každé } n \geq 1.$$
$$c_{n,k} = c_{n,k-1} + c_{n-1,k} \qquad \text{pro každé } n > k \geq 1.$$

    Dokažte, že pro každé n je $c_{n,n}$ rovno Catalanovu číslu C_n. (Může pomoci interpretovat $c_{n,k}$ jako počet jistých cest v mřížce, nebo dokázat, že $c_{n,k} = \binom{n+k}{n} - \binom{n+k}{n+1}$). [2]

13. Určete počet permutací π množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ takových, že pro žádnou trojici pozic i, j, k splňující $0 < i < j < k \leq n$ neplatí $\pi(i) < \pi(k) < \pi(j)$. Např. permutace $2, 4, 5, 3, 1$ se nepočítá kvůli trojici $i = 1$, $j = 3$ a $k = 4$, protože $2 < 3 < 5$. [4]

14. Pro množinový systém $(P, \mathcal{L})$, kde $P \neq \emptyset$, $\mathcal{L} \neq \emptyset$ a každá $L \in \mathcal{L}$ je podmnožinou P, definujme podmínky:

    - $(P1)$ každá dvojice různých přímek $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ má společný právě jeden bod z P,
    - $(P2)$ pro každou dvojici různých bodů z $p_1, p_2 \in P$ existuje právě jedna $L \in \mathcal{L}$ obsahující p_1 i p_2,

- $(P0)$ existuje čtveřice $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P$ taková, že žádné tři z bodů této čtveřice neleží na společné přímce,
- $(P0')$ existuje kladné číslo r takové, že každá přímka obsahuje právě r bodů a každým bodem prochází právě r přímek.

Najděte všechny systémy $(P, \mathcal{L})$ splňující $(P1)$, $(P2)$ a $(P0')$, ale ne $(P0)$. Dále rozhodněte, zda může nějaký systém $(P, \mathcal{L})$ splňovat $(P1)$, $(P2)$ a $(P0)$, ale ne $(P0')$. [2]

15. Matice obsahující hodnoty pouze 0 a 1 se nazývá $(0,1)$-matice. *Čtvercem* v $(0,1)$-matici $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ budeme nazývat dvojici řádků r, s a dvojici sloupců c, d takových, že $a_{r,c} = a_{r,d} = a_{s,c} = a_{s,d} = 1$. Dokažte, že pro nekonečně mnoho hodnot n platí, že počet $n \times n$ $(0,1)$-matic, které neobsahují žádný čtverec, je alespoň $2^{n\sqrt{n}}$. [2]

16. Pro $n > 3$ vezměme n navzájem různých množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$, každou o velikosti $n - 3$, jejichž sjednocením je množina X velikosti n. Dokažte, že $A_1, A_2, \ldots, A_n$ má systém různých reprezentantů. [2]

17. Pro každé $n \geq 3$ určete vrcholovou souvislost grafu vzniklého odstraněním hran libovolné hamiltonovské kružnice z úplného grafu. [2]

18. Mějme 3-regulární graf G. Dokažte, že G je hranově 2-souvislý právě tehdy, když je vrcholově 2-souvislý. [2]

19. Nechť G je graf (tvaru mřížky 5×5) s vrcholy $V = \{[x, y] : 1 \leq x, y \leq 5\}$ a orientovanými hranami $([x, y], [x, y + 1])$ a $([x, y], [x + 1, y])$ s kapacitami

$$c([x, y], [x', y']) = \frac{1}{\min\{10 - x - y, x + y - 1\}}.$$

Určete velikost maximálního toku ze zdroje $[1, 1]$ do stoku $[5, 5]$. [2]

20. Počítáním (například počtu způsobů, jak něco udělat) dvěma způsoby dokažte

$$\forall n, m; n \geq m : \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = 2^{n-m}\binom{n}{m}.$$

[2]

21. Písemka se skládala ze šesti úloh a psalo ji 20 studentů. Každou úlohu vyřešilo alespoň 12 studentů. Dokažte, že existuje dvojice studentů takových, že každou úlohu vyřešil alespoň jeden z nich. [3]

22. Systém $\mathcal{N}$ podmnožin n-prvkové množiny X nazveme *polonezávislý*, pokud neexistuje trojice $A, B, C \in \mathcal{N}$ taková, že $A \subset B \subset C$. Dokažte, že $|\mathcal{N}| \leq 2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. [2]

23. Mějme nakreslený rovinný graf, kde každá stěna (včetně vnější) je trojúhelník (tj. obsahuje právě tři vrcholy grafu) a každý vrchol má libovolně přiřazeno jedno z čísel 1, 2, 3. Dokažte, že počet stěn obsahujících vrcholy se všemi třemi čísly je sudý. [2]

24. Vrcholy úplného grafu K_n jsou očíslovány čísly $1, \ldots, n$. Rozhodněte, zda

    (a) existuje n takové, že při libovolném obarvení hran grafu K_n dvěma barvami vždy najdeme jednobarevný úplný podgraf na třech vrcholech, jehož všechny vrcholy mají lichá čísla. [2]

(b) existuje n takové, že při libovolném obarvení hran grafu K_n dvěma barvami vždy najdeme jednobarevný úplný podgraf na třech vrcholech, z nichž alespoň jeden vrchol má liché a alespoň jeden vrchol má sudé číslo. [2]

25. Dokažte, že pro každé $n \geq 2$ a každé obarvení hran grafu K_n dvěma barvami najdeme jednobarevnou kostru. [2]

26. Mřížové body v rovině (tj. body, jejichž obě souřadnice jsou celá čísla) jsou obarveny 2012 barvami. Ukažte, že lze vybrat 2012 vodorovných a 2012 svislých mřížových přímek tak, že všechny jejich průsečíky mají stejnou barvu. [4]