Výsledky příkladů ze cvičení KGI 6.3.2012

Budeme používat:

- $\check{s}(n)$ pro počet permutací n-prvkové množiny bez pevného bodu
- $s(n,k)$ pro počet surjektivních zobrazení z n-prvkové množiny na k-prvkovou

Spočtěte:

1. Počet způsobů rozdělení n lidí do k neprázdných skupin.
   Výsledek: $s(n,k)$
2. Počet různých způsobů rozdělení n manželských párů do n tanečních párů tak, aby žádní manželé nebyli spolu v tanečním páru.
   Výsledek: $\check{s}(n)$
3. Počet permutací s právě jedním cyklem.
   Výsledek: Postupně volíme $\pi(1), \pi(\pi(1)), \pi(\pi(\pi(1))), \ldots$ a vyjde $(n-1)!$
4. Počet způsobů přidělení klobouků takových, že přesně k z n návštěvníků dostane svůj klobouk.
   Výsledek: $\binom{n}{k}\check{s}(n-\mathbf{k})$
5. Pravděpodobnost, že nějaká dvojice lidí ze 30-členné skupiny slaví narozeniny stejný den.
   Výsledek přes počet prostých funkcí:

$$1 - \frac{\binom{365}{30}30!}{365^{30}} \approx 0,7063.$$

Lze řešit i pomocí PIE na množiny $A_{i,j}$ přiřazení narozenin k lidem, kde lidé i a j dostanou stejný den. Tento postup v tomto případě ale rozhodně nedoporučuji. Zde budeme počítat jen po průniky trojic množin.

$$\begin{aligned}
|A_{i,j}| &= 365^{29} \\
|A_{i,j} \cap A_{i,k}| &= |A_{i,j} \cap A_{k,l}| = 365^{28} \\
|A_{i,j} \cap A_{i,k} \cap A_{j,k}| &= |A_{i,j} \cap A_{i,k} \cap A_{k,l}| = |A_{i,j} \cap A_{i,k} \cap A_{i,l}| = \\
&= |A_{i,j} \cap A_{i,k} \cap A_{l,m}| = |A_{i,j} \cap A_{k,l} \cap A_{m,n}| = 365^{27}
\end{aligned}$$

Je třeba počítat s tím, že např. přiřazení, kdy má trojice lidí i, j, k stejný den narozenin, se započítá do tří průniků dvojice množin a do jednoho průniku trojice množin. Výsledek začíná (bez záruky):

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup A_{i,j}\right| = \binom{30}{2}365^{29} - \left(\frac{\binom{30}{2}\binom{28}{2}}{2} + 3\binom{30}{3}\right)365^{28} + \\
+ \left(\frac{\binom{30}{2}\binom{28}{2}\binom{26}{2}}{3!} + 3\binom{30}{3}\binom{28}{2} + 16\binom{30}{4}\right)365^{27} + \binom{30}{3}365^{28} - \\
- \ldots
\end{aligned}$$

Už jen tímto jsme ale zjistili, že výsledek bude mezi $0,4832$ a $0,8068$.

6. Počet způsobů rozesazení n manželských párů na $2n$ míst v řadě tak, aby žádní manželé neseděli vedle sebe.
   Idea řešení: PIE na množiny rozesazení, kdy p-tý pár sedí vedle sebe
   Výsledek:
$$(2n)! - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} 2^i (2n-i)!$$

7. Počet grafů na n navzájem rozlišitelných vrcholech s aspoň jedním izolovaným vrcholem.
   Idea řešení: PIE na množiny A_j grafů s j-tým vrcholem je izolovaným
   Výsledek:
$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} 2^{\binom{n-i}{2}}.$$

8. Permutace slova MASSACHUSETTS, kde nejsou žádná dvě S vedle sebe (CH je jedno písmeno). Různé výskyty stejného písmene považujeme za různé (budeme značit např. $S_1, \ldots, S_4$); celkem je tedy 12! permutací.
   Nejrychlejší řešení: Nejprve zpermutujeme písmena různá od S — 8! možností. Poté S_1 můžeme vsunout na 9 pozic. Při vkládáni S_2 nesmíme použít dvě pozice okolo S_1, a tedy máme 8 pozic. Pro S_3 potom 7 pozic a pro S_4 6. Celkově $8! \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 121927680$
   Výsledek přes PIE (Případy, kdy dvě dvojice S jsou vedle sebe se dělí na případy, kdy jdou tři S za sebou a kdy máme dvě disjunktní dvojice S):
$$12! - 4 \cdot 3 \cdot 11! + \left(\frac{4!10!}{2} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10! \right) - 4!9! = 121927680$$