Výsledky příkladů na vytvořující funkce a řešení rekurencí ze cvičení a DÚ

Jsou zde pouze konečné výsledky pro ověření Vašich výpočtů. Na zápočtové písemce a v řešeních DÚ je samozřejmě vždy potřeba psát i kompletní odvození (u příkladů na rekurence stačí i ověření, že výsledek rekurenci splňuje).

Výsledky jsou bez záruky. Pokud najdete chybu, dejte mi vědět.

1. **Najděte VF k posloupnosti:**

$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$	$f(x) = \frac{1}{1+x}$
$1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \ldots$	$f(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$
$0, 0, 0, 6, -6, 6, -6, 6, -6, \ldots$	$f(x) = \frac{6x^3}{1+x}$
$1, 2, 4, 1, 3, 9, 1, 4, 16, 1, 5, 25, 1, 6, 36 \ldots$	$f(x) = \frac{1}{1-x^3} + \frac{x(2-x^3)}{(1-x^3)^2} + \frac{x^2(x^6-3x^3+4)}{(1-x^3)^3}$
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \ldots$	$f(x) = \frac{1}{x(1-x)} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}$

2. **Pro danou funkci najděte posloupnost, jejíž je vytvořující funkcí:**

$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$	$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, neboli $a_n = n$
$f(x) = 2 + \frac{1}{1-x}$	$3, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$, neboli $a_n = 3$ pro $n = 0$ a $a_n = 1$ pro $n \geq 1$
$f(x) = \frac{x}{1-x^3}$	$0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots$, neboli $a_n = 1$ pro $n = 1 \pmod 3$ a $a_n = 0$ pro ostatní n
$f(x) = \frac{1-x^2}{1-x}$	$1, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots$, neboli $a_n = 1$ pro $n \leq 1$ a $a_n = 0$ pro $n \geq 2$
$f(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}$	$1,\ 2 \cdot 2,\ 3 \cdot 4,\ 4 \cdot 16 \ldots$, neboli $a_n = (n+1) \cdot 2^n$

3. **Vyřešte rekurence:**

   (a) $a_{-1} = 3$, $a_0 = 4$, $a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1}$ pro $n \geq 0$
   Řešení: $a_n = -\frac{1}{2}3^{n+1} + \frac{5}{2}$ (VF vyjde $f(x) = \frac{-8x+3}{(3x-1)(x-1)}$)

   (b) $b_0 = 3$, $b_1 = 4$, $b_{n+2} = 4b_n + 2$ pro $n \geq 0$

   (c) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ pro $n \geq 2$
   Řešení: $a_n = 2^n$ (VF vyjde $f(x) = \frac{1-x}{(1-x)(1-2x)}$)

   (d) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$ pro $n \geq 2$
   Řešení: $a_n = (-1)^{n+1}F_n$ (VF vyjde $f(x) = \frac{x}{(1+x-x^2)}$, nebo si všimneme, že rekurence je podobná Fibonacciho číslům)

   (e) $a_0 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_0$ pro $n \geq 1$
   Řešení: $a_0 = 1$ a $a_n = 2^{n-1}$ pro $n \geq 1$ (pro VF $f(x)$ dostaneme z $2a_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i \cdot 1$ a z pravidla o násobení VF rovnost $2f(x) = f(x)\frac{1}{1-x} + 1$)