2. písemka z Kombinatoriky a grafů (11.5.2011)

Vše, co tvrdíte, zdůvodněte. Můžete bez důkazu používat tvrzení z přednášky a ze cvičení, vždy ale napište znění takového tvrzení. Nepoužívejte zápisky, učebnice ani kalkulačky. V případě nejasnosti v zadání se neváhejte zeptat.

1. Ve frontě na lístky po 100 Kč stojí $2n$ lidí, z nichž n má 100 Kč bankovku a n 200 Kč bankovku. Kasa je na začátku prázdná. Kolik je možností seřazení lidí takových, že pokladní bude mít pro každého diváka s 200 Kč bankovkou nazpět? Např., když $n = 2$, Alena a Bernard mají po 100 Kč a Cyril a David po 200 Kč, je takových možností 8: $ABCD$, $ABDC$, $ACBD$, $ADBC$, $BACD$, $BADC$, $BCAD$ a $BDAC$.

   Určete také pravděpodobnost, že pokladní bude mít pro každého nazpět. [5 bodů]

2. Uvažujme množinový systém $(P, \mathcal{L})$, kde $P \neq \emptyset$, $\mathcal{L} \neq \emptyset$ a každá $L \in \mathcal{L}$ je neprázdnou podmnožinou P, který splňuje:

   - $(P1)$ každá dvojice různých přímek $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ má společný právě jeden bod z P,
   - $(P2)$ pro každou dvojici různých bodů $p_1, p_2 \in P$ existuje právě jedna přímka $L \in \mathcal{L}$ obsahující p_1 i p_2.

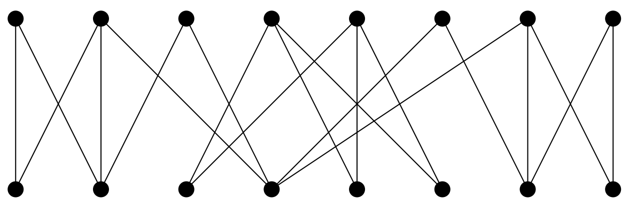
   Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou pro takovýto systém $(P, \mathcal{L})$ ekvivalentní.

   - $(P0)$ Existuje čtveřice $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P$ taková, že žádné tři z bodů této čtveřice neleží na společné přímce.
   - $(P0')$ Množinu P nelze pokrýt dvěma přímkami z $\mathcal{L}$, tedy $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L} : L_1 \cup L_2 \neq P$.

   [5 bodů]

3. Dokažte, že žádný rovinný graf není hranově 6-souvislý. Najděte vrcholově 4-souvislý rovinný graf. To, že je 4-souvislý, také dokažte. Bonus za další 4 body: najděte vrcholově 5-souvislý rovinný graf (a dokažte, že je 5-souvislý). [5 bodů]

4. V zadaném grafu najděte párování s největším možným počtem hran. Dokažte, že žádné větší párování graf nemá. [4 body]



5. Zafixujme $t \geq 2$. Předpokládejme, že pro dvojici čísel $k, n \geq 1$ existuje k-regulární graf na n vrcholech, který neobsahje úplný bipartitní graf $K_{t,t}$. Dokažte, že $k \in O(n^{(t-1)/t})$. Stačí například dokázat, že $k \leq t + n^{(t-1)/t}(t-1)^{1/t}$. [5 bodů]