Domácí úkoly z Kombinatoriky a grafů I

3. série

Termín odevzdání: 17.3.2009

Všechna svá tvrzení řádně zdůvodněte. Můžete bez důkazu používat tvrzení z přednášky a cvičení, vždy ale napište znění tvrzení, které používáte.

1. Nechť D_n značí množinu všech dělitelů čísla n. Množinu D_n uspořádáme relací dělitelnosti. Pro $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$ určete délku nejdelšího
   (a) řetězce, [1 bod]
   (b) antiřetězce. [2 body]
2. Mějme množinu $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ intervalů na reálné přímce $\mathbb{R}$ takovou, že každý bod $x \in \mathbb{R}$ leží v nejvýše k různých intervalech. Dokažte, že $\mathcal{I}$ lze rozložit na k množin $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_k$ tak, aby v každém $\mathcal{I}_j$ byla každá dvojice intervalů disjunktní. [3 body]
3. Mějme systém $\mathcal{N}$ podmnožin X, který neobsahuje žádnou trojici A, B, C množin splňujících $A \subset B \subset C$. Dokažte (např. podobně jako se dokazovala Spernerova věta), že $|\mathcal{N}| \leq 2 \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, kde $n = |X|$. [3 body]

Domácí úkoly z Kombinatoriky a grafů I

3. série

Termín odevzdání: 17.3.2009

Všechna svá tvrzení řádně zdůvodněte. Můžete bez důkazu používat tvrzení z přednášky a cvičení, vždy ale napište znění tvrzení, které používáte.

1. Nechť D_n značí množinu všech dělitelů čísla n. Množinu D_n uspořádáme relací dělitelnosti. Pro $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$ určete délku nejdelšího
   (a) řetězce, [1 bod]
   (b) antiřetězce. [2 body]
2. Mějme množinu $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ intervalů na reálné přímce $\mathbb{R}$ takovou, že každý bod $x \in \mathbb{R}$ leží v nejvýše k různých intervalech. Dokažte, že $\mathcal{I}$ lze rozložit na k množin $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_k$ tak, aby v každém $\mathcal{I}_j$ byla každá dvojice intervalů disjunktní. [3 body]
3. Mějme systém $\mathcal{N}$ podmnožin X, který neobsahuje žádnou trojici A, B, C množin splňujících $A \subset B \subset C$. Dokažte (např. podobně jako se dokazovala Spernerova věta), že $|\mathcal{N}| \leq 2 \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, kde $n = |X|$. [3 body]