Domácí úkoly z Kombinatoriky a grafů I

12. série

Termín odevzdání: neomezený

Oprava chyby v zadání 6. úlohy 11. série: Za "Dokažte, že graf G" má být: "s alespoň $2k$ vrcholy"

1. Spočítejte střední hodnotu počtu pevných bodů náhodné permutace. [2 body]
2. Náhodný graf konstruujeme tak, že každou hranu vezmeme nezávisle náhodně s pravděpodobností 1/2. Dokažte, že pro náhodný graf na $n \geq 4$ vrcholech platí, že s pravděpodobností alespoň 1/4
   (a) obsahuje trojúhelník. [2 body]
   (b) je souvislý. [4 body]
3. Kolika způsoby lze rozesadit kolem kulatého stolu n manželských párů tak, aby žádní manželé neseděli vedle sebe? [3 body]
4. Kolik sudých čísel z rozmezí $\{2, 4, \ldots 400\}$ není dělitelných žádnou druhou mocninou přirozeného čísla většího než 1? [3 body]
5. Najděte vzorec pro n-tý člen posloupnosti zadané rekurencí
   $a_0 = 3$, $a_1 = 4$, $a_2 = 4$ a pro $n \geq 3: \quad a_n = 4a_{n-3} + 2$ [2 body]
6. Horským hřebenem délky n nazveme lomenou čáru, která jde zleva doprava z bodu o souřadnicích $(0, 0)$ do bodu $(n, 0)$, nikde nemá y-ovou souřadnici menší než 0, vždy jde pod úhlem 45° nahoru nebo dolů a láme se jen v místech s celočíselnou x-ovou souřadnicí. Určete počet horských hřebenů délky n. [2 body]
7. Rozhodněte, zda je graf incidence Fanovy roviny rovinný. Graf incidence je bipartitní graf, kde partity jsou množina bodů a množina přímek. V grafu je mezi bodem a přímkou hrana právě tehdy, když bod leží na přímce. (viz obrázek v 9. sérii) [3 body]
8. Dokažte, že pro systém bodů a přímek splňující (P1) a (P2) (tj. každé dvě přímky mají společný právě jeden bod a každé dva body určují právě jednu přímku) jsou následující podmínky ekvivalentní:
   - (P0) Existuje čtveřice bodů C taková, že žádné 3 její body neleží na společné přímce.
   - (P0') Neexistuje dvojice přímek, jejichž sjednocení by obsahovalo všechny body.
   - (P0") Existují dvě přímky, z nichž každá obsahuje alespoň tři body.

   [4 body]
9. Osvobozeným čtvercem nazveme libovolnou čtvercovou tabulku $n \times n$, v jejímž každém políčku je zapsáno číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ortogonalitu dvou osvobozených čtverců definujeme stejně jako pro latinské čtverce. Dokažte, že
   (a) pokud existuje t navzájem ortogonálních latinských čtverců $n \times n$, pak existuje $t + 2$ navzájem ortogonálních osvobozených čtverců $n \times n$. [2 body]

(b) pokud existuje $t+2$ navzájem ortogonálních osvobozených čtverců $n \times n$, pak existuje t navzájem ortogonálních latinských čtverců $n \times n$. [3 body]

10. Pro $m \leq n$ definujeme latinský obdélník $m \times n$ jako obélníkovou tabulku $m \times n$, v jejímž každém políčku je zapsáno číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ a platí, že v žádném řádku ani sloupci se žádné číslo neopakuje. Spočítejte počet všech možných latinských $2 \times n$ obdélníků. [3 body]

11. Rozhodněte, zda existuje n takové, že při libovolném obarvení hran grafu K_n dvěma barvami vždy najdeme jednobarevný úplný podgraf na třech vrcholech,

    (a) jehož všechny vrcholy mají lichá čísla? (vrcholy K_n jsou očíslovány $1, \ldots, n$) [2 body]

    (b) v němž alespoň jeden vrchol má liché a alespoň jeden vrchol má sudé číslo? [3 body]

12. Rozhodněte, zda pro každé $n \geq 2$ a každé obarvení hran grafu K_n dvěma barvami najdeme jednobarevnou kostru. [3 body]

13. Najděte obarvení množiny všech bodů roviny dvěma barvami takové, že nenajdeme rovnostranný trojúhelník o straně délky 1, který by měl všechny vrcholy stejné barvy. [4 body]

14. Dokažte, že každý souvislý graf je 3-hamiltonovský. Graf G na n vrcholech je k-hamiltonovský, pokud existuje očíslování $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ všech jeho vrcholů takové, že $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : dist_G(v_i, v_{i+1}) \leq k$, kde $v_{n+1} := v_1$. (Tedy hamiltonovské grafy jsou právě 1-hamiltonovské grafy.) [5 bodů]

15. Najděte souvislý graf, který není 2-hamiltonovský (definice viz předchozí úloha). [3 body]