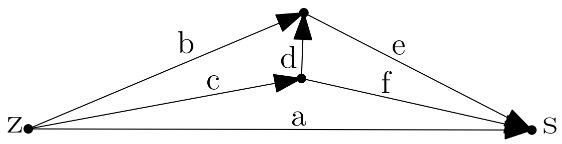
Domácí úkoly z Kombinatoriky a grafů I

11. série

Termín odevzdání: neomezený

1. Dokažte, že pro všechny možné hodnoty kapacit a, b, c, d, e, f se Ford-Fulkersonův algoritmus na následujícím grafu vždy zastaví. (Zlepšující cestu, která se použije, si nevybíráte — v každé iteraci musíte vzít v úvahu všechny možnosti výběru zlepšující cesty). [4 body]



2. Rozhodněte, zda

   (a) každý graf obsahující hamiltonovskou kružnici je vrcholově 2-souvislý. [2 body]

   (b) každý graf obsahující uzavřený eulerovský tah je vrcholově 2-souvislý. [2 body]

   (c) každý graf obsahující uzavřený eulerovský tah je hranově 2-souvislý. [1 bod]

3. Dokažte, že každý hranově k-souvislý graf na n vrcholech má alespoň $kn/2$ hran. [3 body]

4. Rozhodněte, zda každý graf na $n \geq 3$ vrcholech, z nichž každý má stupeň alespoň d, kde $d \geq (n-1)/2$, je

   (a) hranově d-souvislý. [3 body]

   (b) vrcholově d-souvislý. [2 body]

5. Pro každé sudé $n \geq 4$ najděte graf G na n vrcholech, které mají stupně alespoň $d = (n-2)/2$, a přitom G není hranově d-souvislý. [2 body]

6. Dokažte, že graf G **s alespoň 2k vrcholy** je vrcholově k-souvislý právě tehdy, když pro každou dvojici disjunktních množin X, Y, každá obsahující právě k vrcholů, existuje k vrcholově disjunktních cest mezi X a Y, tj. každý vrchol G (včetně těch v $X \cup Y$) leží na nejvýše jedné z nich. Můžete bez důkazu použít Mengerovu větu, která říká, že graf je vrcholově k-souvislý právě tehdy, když mezi každými dvěma vrcholy vede alespoň k cest, které jsou vrcholově disjunktní až na koncové vrcholy, které mají společné. [4 body]

7. Řekneme, že graf je kritický k-souvislý, pokud je vrcholově k-souvislý, ale po odebrání jakékoliv hrany přestane být k-souvislý.

   (a) Dokažte, že každý kritický 2-souvislý graf obsahuje vrchol stupně 2. [3 body]

   (b) Pro každé $\mathbf{d \geq 2}$ najděte kritický 2-souvislý graf obsahující vrchol stupně d. [2 body]

8. Dokažte, že každý hranově 2-souvislý graf na $n \geq 3$ vrcholech má alespoň n různých koster. [3 body]