7. série domácích úkolů

7.1 Pro $n > 3$ vezměme n navzájem různých množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$, každou o velikosti $n - 3$, jejichž sjednocením je množina X velikosti n. Dokažte, že $A_1, A_2, \ldots, A_n$ má systém různých reprezentantů.

(3 body)

7.2 Nechť G je neorientovaný rovinný graf. Dokažte, že existuje orientace G taková, že vstupní stupeň každého vrcholu je nejvýše 3.

(3 body)

7.3 Nechť n je přirozené číslo a X je množina s $n^2 + n + 1$ prvky. Nechť $\mathcal{S}$ je sytém $n + 1$ prvkových podmnožin X takový, že každé dvě množiny $\mathcal{S}$ mají nejvýše jeden společný prvek a $|\mathcal{S}| = n^2 + n + 1$. Ukažte, že $\mathcal{S}$ má sytém různých reprezentantů.

(3 body)

7.4 Dokažte, že CNF-formule, která má v každé klausuli právě n proměnných a každá proměnná se vyskytuje nejvýše n-krát (tzv. $(n, \leq n)$-SAT) je vždy splnitelná.
CNF-formule je logická formule (výraz) ve formě konjunkce (logického součinu, AND) klauzulí, přičemž každá klauzule je disjunkcí (logickým součtem, OR) literálů, což jsou buďto proměnné nebo jejich negace (NOT). Formule je splnitelná pokud je možno dosadit za proměnné pravdivostní hodnoty (0, 1; *true, false*) tak, aby celá formule byla pravdivá (hodnota výrazu byla *true*). Příklad:

$$F = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3)$$

(5 bodů)

7.5 Nechť Q_n (pro $n \leq 1$) je orientovaný graf (n-dimenzionální krychle) s množinou vrcholů $\{0, 1\}^n$ takový, že z vrcholu u vede orientovaná hrana do vrcholu v právě, když se příslušné vektory liší pouze na jediném místě a na tom má vrchol u nulu a vrchol v jednotku. Položme kapacitu každé hrany 1 a $z = (0, 0, .., 0)$, $s = (1, 1, .., 1)$. Najděte

a) maximální celočíselný tok v této síti

(2 body)

b) maximální tok, který je na všech hranách nenulový.

(3 body)