Jméno a příjmení:

1	2	3	4	5	6

1A. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 31.5.2023

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).

Nepište více příkladů na stejný papír!

Na vypracování máte **150 minut.**

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítadla, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčíslujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat nejlépe zítra dopoledne.

Možná se vám bude hodit následující tabulka kvantilových funkcí

	0.9	**0.95**	**0.975**	**0.99**
$\Phi^{-1}(t)$	1.281552	1.644854	1.959964	2.326348
$\Psi_2{}^{-1}(t)$	1.885618	2.919986	4.302653	6.964557
$\Psi_3{}^{-1}(t)$	1.637744	2.353363	3.182446	4.540703
$\Psi_4{}^{-1}(t)$	1.533206	2.131847	2.776445	3.746947

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty!

1. (10 bodů)

$x \backslash y$	0	1	2
1	1/4	1/6	1/12
2	1/6	1/4	1/12

V tabulce je sdružená pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X, Y. Jiné než vyznačené hodnoty tyto veličiny nenabývají.

(a) Určete $P(X = 2 \mid Y = 1)$ a $P(Y = 1 \mid X = 2)$.

(b) Rozhodněte, zda marginální rozdělení X je uniformní na $\{1, 2\}$.

(c) Rozhodněte, zda marginální rozdělení Y je uniformní na $\{0, 1, 2\}$.

(d) Jsou X a Y nezávislé?

(e) Určete $\mathbb{E}(X + Y)$.

(f) Určete $\mathbb{E}(XY)$.

(g) Určete $\operatorname{cov}(X, Y)$.

2. (10 bodů) Skupina s 10 kanoemi jela po Ploučnici celkem přes 5 jezů. Předpokládejme, že každá loď má na každém jezu pravděpodobnost 0.1, že se „cvakne“ (převrhne), všechny tyto události považujte za nezávislé.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že na prvním jezu se převrhne alespoň jedna loď?

(b) Označme X náhodnou veličinu, která udává počet lodí, které se alespoň na jednom jezu převrhly. Určete $\mathbb{E}(X)$ a $P(X = 2)$.

3. (10 bodů) Opakovaným měřením hmotnosti jsme naměřili hodnoty 1.0, 0.9, 1.1. Naměřená data pocházejí z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Určete intervalový odhad pro μ s hladinou věrohodnosti $\alpha = 0.05$, pokud

(a) Víme, že $\sigma = 0.1$.

(b) Hodnotu σ neznáme.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem střední hodnota diskrétní náhodné veličiny. Označme X náhodnou veličinu, která nabývá hodnot -1, 0, 2, každé se stejnou pravděpodobností. Určete $\mathbb{E}(X)$ a $\mathbb{E}(X^2)$.

(b) Definujte pojem hustota náhodné veličiny.

Pro jaké c je funkce $f(x) = c/x^3$ pro $x > 2$ (a $f(x) = 0$ jinak) hustota nějaké náhodné veličiny? Jaká je její střední hodnota?

5. (10 bodů) Vysvětlete princip testování hypotéz. (Objasněte mimo jiné, co je to chyba 1. a 2. druhu.)

6. (10 bodů) Vyslovte větu – slabý zákon velkých čísel. Dokažte ji.