9. cvičení z PSt — 11.–14.4.2023

Soupis vzorečků

- Vztah sdružené hustoty a sdružené distribuční funkce

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)dtds$$
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

- Marginální hustota ze sdružené $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

- Dvojné integrály jde prohazovat (Fubiniho věta)

$$\int_X \int_Y f(x,y)dydx = \int_Y \int_X f(x,y)dxdy.$$

  Potřeba je, aby se nejednalo o „integrály typu $\infty - \infty$“, neboli $\int_X \int_Y |f(x,y)|$ musí být konečný

- pro „rozumnou“ množinu A

$$P((X,Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x,y)dxdy.$$

- nezávislost X, $Y \iff F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$
- $\mathbb{E}(X \mid B) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|B}(x)dx$
- PNS: $\mathbb{E}(g(X)|B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|B}(x)dx$
- X, Y jsou spojité n.n.v.. Pak $Z = X + Y$ má hustotu $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$.

Práce s distribuční funkcí

1. Metrový klacek rozlomíme na dva kusy – lomem v uniformně náhodném bodě. Buď D délka delší části.
(a) Jaké je rozdělení D? (b) Určete $\mathbb{E}(D)$.

2. Pro jistý problém máme k dispozici dva algoritmy, A a B. Algoritmus C spočívá v tom, že si náhodně vybereme, který z algoritmů A, B spustíme – A bude mít pravděpodobnost p, B pravděpodobnost $1-p$. Dobu běhu A, B, C chápeme jako náhodné veličiny, označíme je X, Y, Z.
(a) Určete F_Z pomocí F_X, F_Y. (b) Pokud jsou X, Y spojité, určete f_Z pomocí f_X, f_Y.

3. Nechť $X_i \sim Exp(\lambda_i)$ pro $i = 1, \dots, n$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Označme $M = \min(X_1, \dots, X_n)$. Ukažte, že $M \sim Exp(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

4. Buď Y maximum z k uniformně náhodných čísel z intervalu $[0,1]$.
(a) Najděte distribuční funkci F_Y.
(b) Odsud určete hustotu f_Y.
(c) Spočtěte $\mathbb{E}(Y)$.
(d) Jak je to pro minimum těch čísel?

Generování náhodných veličin

5. Vzpomeňte si na větu z přednášky. Nechť $U \sim U(0,1)$. Jak vyrobíte náhodnou veličinu
(a) s rozdělením $U(a,b)$?
(b) s rozdělením $N(0,1)$? (Využijte funkce Φ jako "black box".)
(c) s uniformním rozdělením na množině $\{1, 2, \dots, 6\}$?

Konvoluce

6. Buďte $X, Y, Z \sim U(0,1)$ nezávislé náhodné veličiny.
(a) Jaké je rozdělení $X + Y$? Určete hustotu (dvěma způsoby) – podle konvolučního vzorce i „podle obrázku".
(b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$? Pro jednoduchost určete hustotní funkci jen na intervalu $[0,1]$.
(c) Jak výsledek ověřit samplováním?

7. Buďte $X, Y, Z \sim Exp(\lambda)$ nezávislé náhodně veličiny.
(a) Jaké je rozdělení $X + Y$? (b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$?

Sdružená hustota

8. Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x,y) = e^{-x-y}$ pro $x, y > 0$ (a 0 jinak).
(a) Určete marginální hustoty f_X, f_Y.
(b) Určete také distribuční funkce F_X, F_Y, $F_{X,Y}$.
(c) Jsou X, Y nezávislé?
(d) Najděte $P(X + Y \le 1)$ a $P(X > Y)$.

9. (Buffonova jehla) Na nekonečnou podlahu hodíme náhodně jehlu délky ℓ. Podlaha je z prken, jejichž okraje tvoří rovnoběžné přímky ve vzdálenosti d. Určete pravděpodobnost, že jehla bude přesahovat okraj některého prkna.

Nápověda

1: Spočtěte napřed distribuční funkci D, pak její hustotu.
2: Věta z poslední přednášky (nebo obecněji věta o celkové pravděpodobnosti).
3: Jaká je distribuční funkce M pomocí distribučních fcí $X_1, \dots, X_n$.
4: Jaká je distribuční funkce Y pomocí distribučních fcí těch uniformně náhodných čísel?
5a: Napište vzorec distribuční funkce $U(a,b)$ a odsud určete kvantilovou funkci.
5b: Nehledejte explicitní vzorec, jen formulku pomocí Φ.
5c: Nakreslete si napřed, jak vypadá distribuční funkce, pak jak vypadá kvantilová funkce.
8d: Nakreslete, přes jakou množinu se má integrovat. Pak případně vyjádřete jako dvojný integrál se správně zapsanými mezemi. Pokud zvládnete to, zbytek je lehký.
9: Nakreslete obrázek a popište polohu jehly pomocí dvou náhodných proměnných (posun a úhel).

K procvičení

10. Házíme na terč – kruh o poloměru 1. Předpokládejme, že každý bod v terči má stejnou pravděpodobnost zásahu, přesněji, každá jeho podmnožina má pravděpodobnost úměrnou své ploše. Označme X vzdálenost od středu. (a) Najděte distribuční funkci F_X. (b) Najděte hustotní funkci f_X. (c) Zjistěte $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{var}(X)$, σ_X.

11. Volme uniformně náhodně bod z polokruhu o poloměru 1, se středem v počátku a v horní polorovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.
(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.
(b) Najděte marginální hustotu f_Y a spočtěte pomocí ní $\mathbb{E}(Y)$.
(c) Pro kontrolu spočtěte $\mathbb{E}(Y)$ přímo (pomocí pravidla PNS).