5. cvičení z PSt — 13.–17.3.2023

Z každé kapitolky (mimo Bonusy) vyřešte aspoň jeden příklad!

Zacházení s $\mathbb{E}$, var**. Linearita $\mathbb{E}$.**

1. Nechť $P(X = 100) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$. Určete $\mathbb{E}(X)$ a $\mathrm{var}(X)$. (Přímo nebo pomocí některé vlastnosti střední hodnoty a rozptylu.)

2. Hodíme n-krát „zobecněnou korunou“ s pravděpodobností, že padne Panna rovnou p. Označme X počet po sobě jdoucích hodů PO. (Např. pokud $n = 6$ a padlo postupně POOPOO, tak $X = 2$.) Určete $\mathbb{E}(X)$. Rozmyslete si, proč se nejedná o binomické rozdělení.

[Nápověda: použijte linearitu. Označme A_i jev, že i-tý hod byl P a $(i+1)$-ní hod O, dále buď $X_i = I_{A_i}$ příslušná indikátorová veličina.]

3. Hodíme $\binom{n}{2}$-krát „zobecněnou korunou“ z minulého příkladu. Přitom tvoříme graf s vrcholy $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Postupně pro všechny dvojice $\{i, j\} \in \binom{V}{2}$ určíme, jestli jsou spojené hranou – to bude tehdy, když příslušným hodem padla Panna. Vzniklému grafu se říká náhodný graf $G(n, p)$.

(a) Ukažte, že střední hodnota počtu hran v grafu je $p\binom{n}{2}$.

[Použijte linearitu jako v minulém případu nebo si všimněte, že počet hran se řídí binomickým rozdělením.)

(b) Ukažte, že střední hodnota počtu trojúhelníků v grafu je $p^3\binom{n}{3}$. [Použijte linearitu: i-tý trojúhelník bude mít svoji proměnnou X_i.]

Podmíněná střední hodnota

4. V testu je 20 otázek s volbami a,b,c,d. Za správnou odpověď (vždy je jen jedna odpověď správná) je 1 bod, za špatnou $-1/4$ bodu, za nevyplněnou otázku nula. Každá otázka je s pravděpodobností p jednou z těch, co se Kvído naučil a tedy zná správnou odpověď. Pokud správnou odpověď nezná, ví o tom, a může se rozhodnout, zda tipovat.

(a) Jaká je střední hodnota počtu bodů, které Kvído získá, pokud bude odpovídat jenom otázky, u kterých zná odpověď?

(b) A co když bude tipovat, když nezná správnou odpověď?

(c) Jak by se musela změnit penalizace za chybnou odpověď, aby byly odpovědi v částech a, b stejné?

5. Král Ludvík chce mít mužského potomka, aby ho mohl opět pojmenovat Ludvík. V každém roce mu jeho manželka porodí právě jedno dítě, které je stejně pravděpodobně chlapec i děvče, nezávisle na předchozích pokusech. Všechny narozené děti přežijí. Pokud se narodí chlapec, tak další potomky už Ludvík mít nebude. Označme S počet narozených synů a D počet narozených dcer.

(a) Určete $\mathbb{E}(S)$.

(b) Určete $\mathbb{E}(D)$.

6. Házíme korunou s pravděpodobností, že padne Panna rovnou p. Když dva hody po sobě dopadnou stejně, tak skončíme. Jaký je střední počet hodů, které provedeme?

7. V televizní soutěži si účastník může vybrat dvě otázky. U otázky A odhaduje, že správně odpoví s pravděpodobností 0.8 (a dostane za to 1 000 Kč). U otázky B je jeho pravděpodobnost úspěchu jen 0.5, zato za správnou odpověď dostane 2 000 Kč. Po špatné odpovědi hra končí, po správné může zkusit druhou otázku (a odměna za už správně odpovězenou otázku mu při špatně odpovězené další nepropadne).

(a) Jaká je střední hodnota výhry, pokud začne otázkou A?

(b) Jaká je střední hodnota výhry, pokud začne otázkou B?

(c) Bonus: pokud jsou pravděpodobností úspěchu p_A, p_B a odměny m_A, m_B, jak se má soutěžící rozhodnout?

(d) * A co když těch otázek bude víc než dvě?

Nezávislost

Diskrétní náhodné veličiny X, Y, nazveme *nezávislé*, pokud pro každé x, y jsou jevy $\{X = x\}$ a $\{Y = y\}$ nezávislé. (Připomeňte si, co znamená zápis $\{X = x\}$.)

8. Ukažte, že jevy A, B jsou nezávislé, právě když jsou nezávislé jejich indikátorové veličiny.

9. Ukažte, že pro diskrétní nezávislé n.v. X, Y platí

$$P(X \le x \,\&\, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y).$$

Pro jednoduchost můžete předpokládat, že $Im(X) = Im(Y) = \{1, 2, \dots, n\}$ pro nějaké n.

Náhodné vektory

Sdružená pravděpodobnostní funkce je definována vztahem $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \,\&\, Y = y)$. „Jednorozměrné funkce“ p_X, p_Y se v tomto kontextu nazývají marginální pravděpodobnostní funkce. Rozmyslete si, jak je zjistit z $p_{X,Y}$ – nejlépe při řešení následujícího příkladu.

10. Ze standardního balíčku s 52 kartami vytáhneme dvě karty. Označíme X počet vytažených es, Y počet králů. Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$ a také marginální pstní funkce p_X, p_Y.

11. Označme X_1, X_2, X_3 výsledky tří nezávislých hodů čtyřstěnnou kostkou (s čísly 1, …, 4).
(a) Jaká je pravděpodobnostní funkce $X = X_1$?
(b) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Y = \max(X_1, X_2)$?
(c) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$?
(d) O kolik se zvýší střední hodnota tím, že můžeme házet třikrát? Neboli, o kolik je vyšší $\mathbb{E}(Z)$ než $\mathbb{E}(X)$?
[Nápověda: Určete napřed $P(Y \le k)$, $P(Z \le k)$.]

Bonusy

12. Připomeňte si definici indikátorové náhodné veličiny I_A.
(a) Jaká je $\mathbb{E}(I_A)$?
(b) Nechť $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Ověřte rovnost

$$1 - I_A = \prod_{i=1}^{n} (1 - I_{A_i}).$$

(c) Roznásobte a použijte větu o linearitě střední hodnoty, abyste získali princip inkluze a exkluze.

13. * Označme M počet emailů, které dostaneme za den, S počet spamů mezi nimi, H počet „hamů“ – těch, co nejsou spamy. Předpokládejme, že $M \sim Pois(\lambda)$ a že každý email má nezávisle na ostatních pravděpodobnost p, že je to spam.
(a) Vyjádřete $P(S = k)$ (jako nekonečnou sumu) pomocí sdruženého rozdělení M a S.
(b) Odvoďte, že $S \sim Pois(p\lambda)$.
(c) Odvoďte, že $H \sim Pois((1 - p)\lambda)$ a také, že H, S jsou nezávislé n.v.