Jméno a příjmení:

1	2	3	4	5	6

4A. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 27.6.2022

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).

Nepište více příkladů na stejný papír!

Na vypracování máte **150 minut.**

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítadla, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčíslujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat nejlépe zítra odpoledne.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty!

1. (10 bodů)

Dvojrozměrný náhodný vektor (X, Y) má pravděpodobnosti jednotlivých hodnot dané tabulkou vpravo.

$x \backslash y$	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/8$	$3/16$
0	$1/16$	$1/8$	$1/16$
1	$3/16$	$1/16$	$1/16$

(a) Vypočtěte $P(X \cdot Y \geq 0)$.

(b) Určete marginální pravděpodobnostní funkce p_X a p_Y.

(c) Pro veličinu $Z = X^2 + Y^2$ určete pravděpodobnostní funkci p_Z a střední hodnotu $\mathbb{E}(Z)$.

(d) Jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé?

2. (10 bodů)

Lidé přicházející do menzy si postupně vybírají místa u jednoho ze tří stolů: červeného, zeleného a modrého. U každého stolu je deset židlí.

(a) Každý si vybere náhodně barvu stolu a pak se usadí na nějaké volné židli. Jaká je distribuce počtu obsazených míst u červeného stolu poté, co do menzy přišlo deset lidí? Jaká je střední hodnota toto počtu?

(b) V části (b) (a jenom v ní) předpokládejme, že si lidé vybírají náhodnou volnou židli (ne náhodný stůl). Vyřešte s tímto předpokladem obě otázky z části (a).

(c) (Opět předpokládáme výběr jako v části (a), navíc zde předpokládáme, že u každého stolu je neomezeně mnoho židlí.) Označme T pořadí člověka, který si jako první sedne k červenému stolu. Dále označme U pořadí člověka, před jehož usazením byl ještě jeden stůl prázdný, ale po jeho usazení to už neplatí.

Určete $\mathbb{E}(T)$. Určete $\mathbb{E}(U)$.

3. (10 bodů) Metrový klacek zlomíme v náhodném bodě na dva kusy. Označme Q podíl délek kratšího a delšího kusu. (Tj. $Q \leq 1$.)

(a) Spočtěte $\mathbb{E}(Q)$.

(b) Určete $P(Q < 1/2)$ a $P(1/3 < Q < 1/2)$.

(c) Určete distribuční funkci F_Q a hustotu f_Q.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem podmíněná střední hodnota diskrétní náhodné veličiny.

Nechť X_1, X_2 jsou výsledky dvou hodů běžnou hrací kostkou (tedy čísla 1, …, 6), označme $X = X_1 + X_2$. Spočtěte $\mathbb{E}(X \mid X_1 > 3)$.

(b) Definujte pojem nezávislé náhodné veličiny (spojitý případ, dvě veličiny). Uveďte obě ekvivalentní formulace.

Rozhodněte, zda existují nezávislé X, Y takové, že $X \sim Exp(2)$ a $Y \sim Exp(2)$. Pokud ano, jakých hodnot může nabývat $\mathbb{E}(X \cdot Y)$?

5. (10 bodů) Vysvětlete princip testování hypotéz. (Objasněte mimo jiné, co je to chyba 1. a 2. druhu.)

6. (10 bodů) Vyslovte větu – slabý zákon velkých čísel. Dokažte ji.