

## 4. cvičení z PSt — 7.–11.3.2022

### Náhodné veličiny

Z obou částí vyřešte aspoň jeden příklad.

1. Necht'  $X \sim \text{Bin}(m, p)$  a  $Y \sim \text{Bin}(n, p)$  jsou n.n.v. Pak  $X + Y \sim \text{Bin}(m + n, p)$ .
  2. Necht'  $X = X_1 + \dots + X_n$ , kde pro každé  $i$  je  $X_i \sim \text{Bern}(p)$ . Pokud jsou veličiny  $X_1, \dots, X_n$  nezávislé, tak  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  (zatím bez definice nezávislých veličin ...). Ukažte na příkladu, že pokud omezení na nezávislost neuvedeme (tj. chceme jen  $X_i \sim \text{Bern}(p)$ ), tak  $X$  může mít i jiné rozdělení.
  3. Nezávislé n.v.  $X_1, \dots, X_n$  mají geometrické rozdělení s parametry  $p_1, \dots, p_n$ . Jaké je rozdělení  $\min(X_1, \dots, X_n)$ ?
  4. Necht'  $X$  má uniformní rozdělení na množině  $\{a, a + 1, a + 2, \dots, b\}$  (pro celá čísla  $a < b$ ). Určete  $\mathbb{E}(X)$ .
  5. V pytlíku je  $N$  bombónů, z nichž  $K$  je dobrých. Náhodně vytáhneme dva, označíme  $X$  počet dobrých vytažených bombónů.
    - (a) Určete  $\mathbb{E}(X)$ .
    - (b) Můžete i napřed řešit pro tažení jen jednoho bombónu.
    - (c) Jak se jmenuje rozdělení n.v.  $X$ ?
    - (d) \* A co když vytáhneme tři, čtyři, ...,  $n$  bombónů?
- 

6. Filip má školu 2 km daleko od domu. Když prší (pravděpodobnost 0.6), tak jde pěšky rychlostí 5 km/h. Jinak jede na kole rychlostí 10 km/h.

Jaká je průměrná rychlost, kterou cestuje do školy? Jaký je průměrný čas, který cesta trvá?

7. V televizní soutěži si účastník může vybrat dvě otázky. U první z nich odhaduje, že správně odpoví s pravděpodobností 0.8 (a dostane za to 1 000 Kč). U druhé otázky je jeho pravděpodobnost úspěchu jen 0.5, zato za správnou odpověď dostane 2 000 Kč. Po špatné odpovědi hra končí, po správné může zkusit druhou otázku (a odměnu za už správně odpovězenou otázku mu při špatné odpovězení další nepropadne).

- (a) Jaká je střední hodnota výhry, pokud začne první otázkou?
- (b) Jaká je střední hodnota výhry, pokud začne druhou otázkou?
- (c) Bonus: pokud jsou pravděpodobností úspěchu  $p_1, p_2$  a odměny  $m_1, m_2$ , jak se má soutěžící rozhodnout?
- (d) \* A co když těch otázek bude víc než dvě?

8. (Kasino v St. Petersburgu) Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v  $n$ -tém hození, dostaneme odměnu  $2^n$  rublů. Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře?