2. cvičení z PSt — 22022022

Podmíněná pravděpodobnost

Užitečné vzorce (na přednášce budou až příště):

- Pokud $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ a $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$, tak
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \dots P(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$
- Pokud $B_1, B_2, \dots$ je rozklad Ω a $A \in \mathcal{F}$, tak
$$P(A) = \sum_i P(A \mid B_i)P(B_i)$$
(sčítance s $P(B_i) = 0$ považujeme za 0).

1. Jaký je vztah tvrzení $P(A \mid B) > P(A)$ a $P(B \mid A) > P(B)$?

2. Vytáhneme si tři karty z běžného balíčku 32 karet. Označme A_i jev i-tá karta je srdcová. Spočtěte $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

3. Pro plánování výletu do Krkonoš používáme českou a polskou předpověď počasí. Předpokládejme, že každá z nich má tutéž pravděpodobnost úspěchu $p \in [0, 1]$, obě předpovědi jsou nezávislé. Používáme je takto: pokud se shodují, věříme jim, pokud ne, rozhodneme se náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že se rozhodneme správně?

4. (Paradox Monty Halla) V soutěžní hře soutěžící (tj. my) stojíme na podiu před třemi dveřmi. Za jedněmi je auto (to chceme), za ostatními koza (tu nechceme, moc žere). Vybereme si jedny dveře, ale než je otevřeme, tak moderátor otevře jedny ze zbylých dveří, ukáže za nimi kozu, a nabídne nám, že můžeme svoji volbu změnit. Máme to udělat? Pomůže to? Uvědomte si, že zadání má (minimálně) následující dvě varianty:

(a) moderátor ví, kde je auto, a tomu přizpůsobí, které dveře otevře;

(b) moderátor si hodí korunou, které dveře otevřít. (Jiné, než ty, co jsme vybrali.) Kdyby odhalil auto, tak bychom asi prohráli, ale to se zrovna nestalo.

Pro snazší domluvu: vybereme dveře číslo 1, auto je za náhodnými dveřmi. Poté, co moderátor otevře dveře 2 nebo 3, tak naši volbu změníme. Spočítejte pravděpodobnost, že vyhrajeme auto, ve variantách (a), (b).

5. V krabici je m bílých a n černých míčků. Dva hráči střídavě tahají míčky, první kdo vytáhne bílý míček prohrál. Jaká je pravděpodobnost $p(m, n)$, že prohraje první hráč? (Sestavte rekurentní formuli.)

6. Alice má n mincí, Bob $n + 1$. Oba hodí všemi svými mincemi a spočítají, komu padne kolikrát panna. Pravděpodobnost, že Bobovi padla vícekrát, je 1/2. (Návod: Bob si dá jednu minci stranou a napřed spočítá těch n ostatních, teprve pak připočte tu poslední.)

7. (Prosecutor's fallacy) Paní C umřely dvě děti krátce po narození. Je obžalovaná za dvojnásobnou vraždu. Žalobce argumentuje takto: Pravděpodobnost syndromu náhlého úmrtí kojenců je 1/8500. Takže pravděpodobnost dvou takových jevů je $1/8500^2$. Tudíž pravděpodobnost, že paní C je nevinná je $1/8500^2$, což je hodně málo.

Formulujte argumenty žalobce v řeči pravděpodobnosti a nalezněte v nich dvě chyby.

Bonusy

8. Varianta problému s obálkami: ve dvou obálkách je v každé částka daná nějakým reálným číslem, v každé jiným. Máme dovoleno jednu obálku otevřít a pak se rozhodnout, zda si necháme tu, nebo tu druhou. Jak můžeme s pravděpodobností $> 1/2$ získat obálku s vyšším obnosem?

(Návod: nebude to o moc víc než $1/2$, navíc ta pravděpodobnost závisí na tom, jak se dané dvě částky liší. Použijte nějakou rostoucí funkci $F : \mathbb{R} \to (0, 1)$.)

9. (Simpsonův paradox) V této úloze budeme mít bonbony dvou druhů: dobré červené a nedobré zelené. Bonbony ale vybíráme z nádoby poslepu (nebo jsme barvoslepí). Rozhodněte, zda se může stát následující podivnost:

- Při vytahování bonbonu z bílé krabice máme vyšší pravděpodobnost, že vytáhneme dobrý bonbon, než z černé krabice.
- Při vytahování bonbonu z bílého sáčku máme vyšší pravděpodobnost, že vytáhneme dobrý bonbon, než z černého sáčku.
- Pokud přesypeme bonbony z bílého sáčku do bílé krabice (a z černého do černé krabice), tak budeme mít lepší pravděpodobnost vytažení dobrého bonbonu v černé krabici.

K procvičení

10. Házíme dvakrát mincí. Je větší pravděpodobnost, že dvakrát padne panna, za předpokladu, že první hod byla panna NEBO že dvakrát padne panna, za předpokladu, že některý hod byla panna?

11. Máme k nádob, v každé z nich a bílých a b černých míčků. Z první vybereme náhodný míček, vhodíme do druhé. Pak z ní vybereme náhodný míček, vhodíme do třetí, atd. Jaká je pravděpodobnost, že z poslední nádoby vytáhneme bílý míček?

12. V urně je a černých a b bílých míčků. Postupně z ní (bez vracení) taháme míčky. Jaká je pravděpodobnost, že první vytažený míček je černý? Druhý, třetí, …?

13. Logická formule $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní obměně $\neg B \Rightarrow \neg A$. Budeme se zabývat analogiemi zahrnujícími pravděpodobnost.

(a) Ukažte, že pokud $P(B \mid A) = 1$, tak také $P(A^c \mid B^c) = 1$.

(b) Ukažte, že je však možné, aby $P(B \mid A) \doteq 1$, ale $P(A^c \mid B^c) \doteq 0$.