12. cvičení z PSt — 9.–13.5.2022

Intervalové odhady

1. Máme jedno měření $X \sim N(\mu, 1)$. (Tj. parametr $\vartheta = \mu$.)

(a) Najděte intervalový odhad pro μ se spolehlivostí 95 %. (Pro konkrétnost: naměřili jsme $x = 2.9$.)

(b) Místo jednoho měření jich provedeme n (pochopitelně nezávislých). Jaký bude teď intervalový odhad pro μ? Pro konkrétnost: naměřili jsme $x_1, \dots, x_9 = 1.82, 1.00, 2.50, 3.00, 0.50, 2.97, 1.76, 1.35, 3.41$.

(c) Nechť X má stále střední hodnotu μ a rozptyl 1, ale není už nutně normální. Co se změní?

2. Tentokrát vybíráme z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$: μ ani σ neznáme, parametr $\vartheta = (\mu, \vartheta)$. Naměřili jsme hodnoty 8.47, 10.91, 10.87, 9.46, 10.40.

(a) Spočtěte vyběrový průměr a výběrový rozptyl.

(b) Kdybychom věřili, že spočtený výběrový rozptyl je skutečná hodnota σ^2, najděte intervalový odhad pro μ.

(c) Najděte intervalový odhad pro μ použitím Studentova t-rozdělení.

3. Počet emailů za den modelujeme pomocí Poissonova rozdělení $Pois(\lambda)$. První týden v prosinci jsme dostali 34,35,29,31,30 emailů. Najděte pro λ intervalový odhad se spolehlivostí 95 %.

Použijte k tomu poslední metodu z přednášky – tu využívající Studentova rozdělení. (Poissonovo rozdělení sice není normální, ale pro dostatečně vysokou hodnotu λ je normálnímu dost podobné, metoda bude mít spolehlivost blízkou 95 %.)

Bodové odhady

4. Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim U(0, \vartheta)$.

(a) Navrhněte bodový odhad ϑ momentovou metodou. (Bylo na přednášce, připomeňte si, jak se to dělalo.)

(b) Navrhněte bodový odhad ϑ metodou maximální věrohodnosti.

(c) Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.

(d) Pro každý z nich spočtěte střední kvadratickou odchylku (MSE).

(e) Který odhad je lepší? Napadá vás nějaký ještě lepší?

5. Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim Geom(p)$.

(a) Navrhněte bodový odhad p momentovou metodou.

(b) Navrhněte bodový odhad p metodou maximální věrohodnosti.

(c) Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.

6. Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim Exp(\lambda)$. Označme $\vartheta = 1/\lambda$.

(a) Navrhněte bodový odhad ϑ momentovou metodou.

(b) Navrhněte bodový odhad ϑ metodou maximální věrohodnosti.

(c) Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.

(d) Spočtěte střední kvadratickou odchylku (MSE).

7. Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim Exp(\lambda)$. Zajímá nás pravděpodobnost p, že $X > 1$ pro $X \sim Exp(\lambda)$. (Připomeňme, že $p = e^{-\lambda \cdot 1}$.)

(a) Navrhněte bodový odhad p (libovolnou metodou), případně několik odhadů.

(b) Prozkoumejte jeho vlastnosti.

K procvičení

8. Na webu `https://www.randomservices.org/random/data/Michelson.html` je soupis naměřených hodnot rychlosti světla při slavném Michelsonovu experimentu z roku 1879. Najděte 95%-ní intervalový odhad. (Můžete předpokládat, že chyba měření je normálně rozdělená se střední hodnotou nula.)

9. Nechť $X \sim Exp(\lambda)$ popisuje dráhu, kterou uletí radioaktivní částice, nechť se rozpadne. Náš přístroj jeji rozpad (a polohu rozpadu, tj. hodnotu X) zachytí, ale jen pokud $1 \leq X \leq 2$. Formálně, budeme zkoumat náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n \sim F_{X|B}$ pro jev $B = 1 \leq X \leq 2$.

(a) Navrhněte bodový odhad λ momentovou metodou.
(b) Navrhněte bodový odhad λ metodou maximální věrohodnosti.
(c) Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.

10. Máme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n \sim Pois(\lambda)$.

(a) Navrhněte bodový odhad λ momentovou metodou.
(b) Navrhněte bodový odhad λ metodou maximální věrohodnosti.
(c) Spočtěte střední kvadratickou odchylku (MSE).

11. Máme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n \sim U(\vartheta, \vartheta + 1)$.

(a) Navrhněte bodový odhad ϑ momentovou metodou.
(b) Navrhněte bodový odhad ϑ metodou maximální věrohodnosti.
(c) Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.
(d) Pro každý z nich spočtěte střední kvadratickou odchylku (MSE).
(e) Který odhad je lepší? Napadá vás nějaký ještě lepší?