Kombinatorika a grafy III – 2018/19

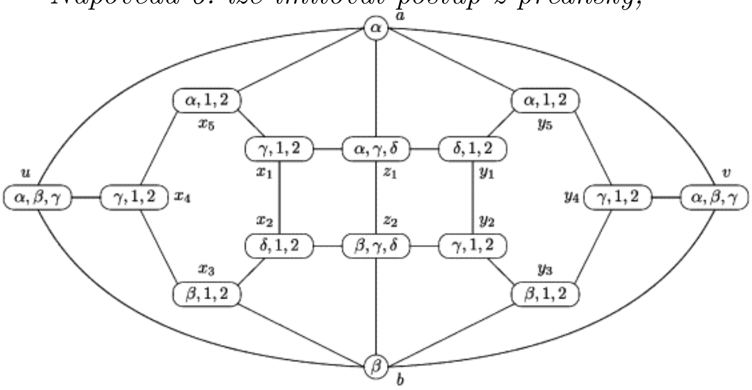
9. série

1. Určete vybíravost následujících grafů: úplný graf bez jedné hrany, $K_{2,3}$, $K_{2,22}$, $K_{3,3}$, $K_{3,33}$, C_{2n}.
2. * Určete vybíravost grafu $\Theta_{2,2,2m}$ – dva vrcholy spojené třemi cestami délek 2, 2, a $2m$ (pro přirozené m).
3. Nalezněte graf G tž. $\chi_l(G) > \chi(G)$ a $|V(G)|+|E(G)|$ je nejmenší možné/co nejmenší se vám povede.
4. Ukažte, že $\chi_l(K_{n,n^n}) = n + 1$.
5. Ukažte, že každý rovinný graf bez trojúhelníků má vybíravost nejvýše 4.
6. * Nalezněte rovinný graf bez trojúhelníků, jehož vybíravost je větší než 3.
7. Nechť G je souvislý graf maximálního stupně Δ. Jestliže G není klika ani lichý cyklus, pak $\chi_l(G) \leq \Delta$.
8. Ukažte, že pro libovolný graf G s n vrcholy a jeho doplněk $\bar{G}$ platí $\chi_l(G) + \chi_l(\bar{G}) \leq n + 1$.
9. * Nechť G je souvislý graf minimálního stupně alespoň 2. Ukažte, že G je 2-vybíravý právě tehdy, když G je buď sudý cyklus, nebo sjednocení tří cest sudé délky se společnými konci t.ž. alespoň dvě z těchto cest mají délku 2.
10. Nechť G je rovinný graf s vnější stěnou ohraničenou indukovaným cyklem K. Jestliže každý vrchol G má nejvýše dva sousedy v K, pak každé 5-obarvení K lze rozšířit na 5-obarvení G.

Nápověda 4: na přednášce byla jedna nerovnost.

Nápověda 5: stačí užít degenerovanost.

Nápověda 6: lze imitovat postup z přednšky,



Nápověda 7: postupujte podobně jako u důkazu Brooksovy věty: najděte vrchol v a jeho dva nesousedící sousedy u, w. Pak najděte kostru grafu s kořenem v, v níž jsou vrcholy u, w listy.

Nápověda 8: stačí užít degenerovanost.

Nápověda 10: využijte Thomassenovu větu v jejím "technickém"znění.