Kombinatorika a grafy III – 2018/19

8.série

1. Nechť G je graf a (A, B) je ε-regulární pár v G pro nějaké $0 < \varepsilon \leq 1$. Nechť $|A| = |B| = n$ a $p = d(A, B)$. Ukažte, že počet 4-cyklů $v_1v_2v_3v_4$ v G tž. $v_1, v_3 \in A$ a $v_2, v_4 \in B$ je alespoň $p^4n^4 - 17\varepsilon n^4 - 2n^3$.

2. Zformulujte a dokažte variantu Removal lemma pro K_4.

3. Dokažte následující zesílení Erdős-Stoneovy věty: Nechť H je graf barevnosti $c \geq 2$. Pro každé $\beta > 0$ existuje $\gamma > 0$ takové, že každý graf G s n vrcholy a alespoň $\left(1 - \frac{1}{c-1} + \beta\right) \frac{n^2}{2}$ hranami obsahuje alespoň $\gamma n^{|V(H)|}$ podgrafů isomorfních H.

4. Ukažte, že pro každé $p > 0$ existují $c, \varepsilon > 0$ takové, že platí následující. Nechť G je graf a (A, B) je ε-regulární pár v G. Nechť $|A| = |B| = n$ a $d(A, B) \geq p$, a $A' \subseteq A$ a $B' \subseteq B$ jsou podmnožiny tž. $|A'| = |B'| \geq (1 - \varepsilon)n$, každý vrchol A' má alespoň $(p - 2\varepsilon)n$ sousedů v B' a každý vrchol B' má alespoň $(p - 2\varepsilon)n$ sousedů v A'. Pak bipartitní podgraf G s partitami A' a B' obsahuje alespoň cn navzájem hranově disjunktních perfektních párování.

5. Dokažte následující: pro každé $\alpha > 0$ existují $c, n_0 > 0$ takové, že každý graf G s $n \geq n_0$ vrcholy a alespoň αn^2 hranami obsahuje $\lceil cn \rceil$-regulární bipartitní graf jako podgraf.

6. * Nechť $0 \leq p \leq 1$ je reálné číslo. Ukažte, že jsou-li $A_1, \ldots, A_4$ disjunktní podmnožiny vrcholů nějakého grafu G stejné velikosti n, páry (A_i, A_j) jsou ε-regulární pro $1 \leq i < j \leq 4$, $d(A_i, A_j) \geq p$ pro $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ a $d(A_i, A_j) \leq p$ pro $(i, j) \in \{(1, 3), (2, 4)\}$, pak G obsahuje alespoň $p^4(1 - p)^2n^4 - 100\varepsilon n^4$ indukovaných 4-cyklů.