Kombinatorika a grafy III – 2018/19

7.série

1. Každé dvě disjunktní množiny vrcholů grafu tvoří 1-regulární pár. Nechť pro disjunktní (A, B) platí, že pro každé množiny $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, $X, Y \neq \emptyset$ platí

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq 0$$

(jakási 0-regularita). Co můžete říci o grafu indukovaném $A \cup B$?

2. Pokud $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$, je silnější vlastnost ε_1-regularita nebo ε_2-regularita?

3. Ukažte, že ε-regulární rozklad grafu G je i ε-regulární rozklad grafu $\bar{G}$.

4. Buď $n(\varepsilon, m)$ libovolná funkce dvou proměnných. Předpokládejte, že platí následující varianta regularity lemma: pro každé $\varepsilon > 0$ a každé m existuje M takové, že každý graf s $n \geq n(\varepsilon, m)$ vrcholy má ε-regulární rozklad s k částmi, kde $m \leq k \leq M$.

   Ukažte, že pak platí i regularity lemma.

5. Buď (G_n) posloupnost grafů takových, že $|G_n| = n$ a $\|G_n\| = o(n^2)$. Ukažte, že pro (G_n) platí regularity lemma – tj. lemma platí v oslabené verzi, kde smíme vybírat jen grafy z posloupnosti (G_n).

---

6. Nechť (A, B) je ε-regulární pár s $d(A, B) = d$ a $|A| = |B| = n$. Pak existuje $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, pro která
   - $|X| = |Y| \geq (1 - \varepsilon)n$,
   - každý vrchol v X má alespoň $(d - 2\varepsilon)|B|$ sousedů v Y a
   - každý vrchol v Y má alespoň $(d - 2\varepsilon)|A|$ sousedů v X.

7. „Zúžení reg. páru“ Nechť (A, B) je ε-regulární pár (v nějakém grafu) s $d(A, B) = d$. Nechť dále $\alpha > \varepsilon$ a nechť $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$ splňují $|X| \geq \alpha|A|$, $|Y| \geq \alpha|B|$. Pak (X, Y) je ε'-regulární pár, kde $\varepsilon' = \max\{\varepsilon/\alpha, 2\varepsilon\}$ a $d(X, Y) = d'$ přičemž $|d - d'| \leq \varepsilon$.

8. * „společné sousedství“ Nechť (A, B) je ε-regulární pár s $d(A, B) = d$, buď s přirozené číslo. Pro $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_s) \in A^s$ označme $N(\vec{a}) = \cap_{i=1}^{s} N(a_i)$ společné sousedství vrcholů v $\vec{a}$. Nechť $Y \subseteq B$ splňuje $(d - \varepsilon)^{s-1}|Y| \geq \varepsilon|B|$. Pak platí

$$|\{\vec{a} \in A^s : |Y \cap N(\vec{a})| < (d - \varepsilon)^s |Y|\}| < s\varepsilon|A|^s .$$

---

9. Nechť $|A| = |B| = |C| = n$, nechť (A, B), (B, C), (C, A) jsou tři ε-regulární páry, pro nějaké $\varepsilon \in (0, 1/2]$. Buď $t = t(A, B, C)$ počet trojúhelníků s jedním vrcholem v A, druhým v B, třetím v C. Pak

$$|t - d(A, B)d(B, C)d(C, A)n^3| \leq 13\varepsilon n^3.$$

Nápověda pro 4: Volte dostatečně velké M.

Nápověda pro 5: Můžeme volit libovolný rozklad na nepříliš mnoho částí. Pokud bude n dost velké, a tedy $\|G_n\|/n^2$ dost malé, tak pro všechny testované dvojice $X \subseteq A, Y \subseteq B$ bude platí $d(X, Y) \leq \varepsilon$, tudíž $(A, B))$ je ε-regulární pár.

Nápověda pro 6: Použijte dvakrát lemmátko z přednášky.

Nápověda pro 8: Použijte indukci přes s, pro $s = 1$ jsme dokazovali na přednášce.

Nápověda pro 9: Podle věty z přednášky, většina vrcholů z A má typické množství sousedů v B i v C. Pro ně použijte definici regulárního páru pro (B, C).