Kombinatorika a grafy III – 2018/19

6.série

1. Ukažte, že každý graf G má stromový rozklad šířky $tw(G)$, v němž žádné dvě části nejsou v inkluzi.

   Stromový rozklad $(T, (V_t)_{t \in T})$ nazveme *hladký* (angl. *smooth*), pokud pro nějaké k je

   - $|X_t| = k + 1$ pro všechny vrcholy $t \in V(T)$ a
   - $|X_s \cap X_t| = k$ pro všechny hrany $st \in E(T)$

2. Ukažte, že každý graf G má hladký stromový rozklad šířky $tw(G)$.

3. Pokud $(T, (V_t)_{t \in T})$ je hladký stromový rozklad, tak $|V(T)| = |V(G)| - k$. Speciálně tedy $|V(T)| \leq |V(G)|$.

Pro graf G s danou vahou $w : V(G) \to \mathbb{R}+$ nazveme (k, α)-*separátorem* množinu $X \subseteq V(G)$ takovou, že $|X| \leq k$ a pro každou komponentu K grafu $G - X$ platí $w(K) \leq \alpha w(G)$.

Zde $w(K) = \sum_{v \in V(K)} w(v)$, pokud graf není vážený, uvažujeme w identicky rovno 1.

4. Ukažte, že každý vážený strom má $(1, \frac{1}{2})$-separátor. Popište algoritmus, jak ho nalézt.

5. Ukažte, že každý graf stromové šířky k má $(k + 1, \frac{1}{2})$-separátor, a můžeme ho (při daném stromovém rozkladu) nalézt v lineárnim čase.

---

6. Je dán graf G a jeho stromový rozklad o šířce k. Rozhodněte, zda G je 3-obarvitelný v čase $O^*(3^k)$ – což je zkratka za $O(3^k|V(G)|^l)$ pro nějakou konstantu l.

7. Je dán graf G a jeho stromový rozklad o šířce k. Nalezněte jeho minimální vrcholové pokrytí v čase $O^*(2^k)$.