Kombinatorika a grafy III – 2018/19

5.série

1. Dokažte, že má-li graf G stromový rozklad $(T, \mathcal{V})$ takový, že V_t je klika v G pro každé $t \in V(T)$, pak G je chordální.

2. Dokažte, že graf má stromovou šířku nejvýše k právě tehdy, když je podgrafem chordálního grafu G' takového, že $\omega(G') \leq k + 1$.

3. Mějme graf G a jeho stromový rozklad $(T, \mathcal{V})$. Pro vrchol $t \in V(T)$ definujeme H_t jako graf, který vznikne z $G[V_t]$ přidáním klik na množinách $V_t \cap V_{t'}$ pro $tt' \in E(T)$. Všechny grafy H_t se nazývají *torsa* stromového rozkladu $(T, \mathcal{V})$.

   Buď $\mathcal{H}$ množina grafů. Ukažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

   (a) G lze získat z grafů v $\mathcal{H}$ pomocí klikových sum (tj. k-sum pro libovolné k).

   (b) G má stromový rozklad, jehož torsa jsou grafy v $\mathcal{H}$.

4. Je-li $\mathcal{F}$ libovolný systém množin, tak jeho *průnikový graf* je graf s vrcholy $\mathcal{F}$, v kterém $X, Y \in \mathcal{F}$ jsou spojeny hranou, právě tehdy, když $X \cap Y \neq \emptyset$.

   Ukažte, že graf je chordální právě tehdy, když je izomorfní průnikovému grafu podstromů nějakého stromu.

---

5. Nechť G je rovinná triangulace a $G^\star$ je její duál. Nechť T je kostra G a $T^\star$ je podgraf $G^\star$ obsahující právě hrany takové, že odpovídající hrany G nepatří do T. Ukažte, že $T^\star$ je kostra $G^\star$.

6. V situaci z předchozího příkladu si vyberme libovolný vrchol $v \in V(G)$. Každý vrchol f grafu $G^\star$ odpovídá stěně G incidentní se třemi vrcholy a_f, b_f a c_f. Definujme V_f jako množinu všech vrcholů, které leží na cestách z a_f, b_f a c_f do v ve stromu T. Ukažte, že $(T^\star, \mathcal{V})$ je stromový rozklad G.

7. Ukažte, že rovinný graf poloměru r má stromovou šířku nejvýše $3r$.

8. (*) Ukažte, že rovinný graf s n vrcholy má stromovou šířku $O(\sqrt{n})$.

---

9. Nechť G je graf a W je množina vrcholů G velikosti $2k + 1$. Říkáme, že W je *k-rozbitná*, jestiže existuje $X \subseteq V(G)$ velikosti nejvýše k tž. každá komponenta $G - X$ obsahuje nejvýše k vrcholů z W. Ukažte, že má-li G stromovou šířku nejvýše $k - 1$, pak každá podmnožina $V(G)$ velikosti $2k + 1$ je k-rozbitná.

10. Nechť G je graf a W je množina vrcholů G velikosti $2k+1$. Nechť $\mathcal{B} = \{X \subseteq V(G) : G[X]$ je souvislý a $|X \cap W| \geq k + 1\}$.

    Ukažte, že $\mathcal{B}$ je bramble, a že když W není k-rozbitná, pak bramble $\mathcal{B}$ má řád alespoň $k + 1$.

11. (*) Nechť G je graf takový, že každá podmnožina $V(G)$ velikosti $2k+1$ je k-rozbitná. Ukažte, že G má stromovou šířku nanejvýš $3k$.

12. Ukažte, že má-li graf stromovou šířku větší než $3k$, pak obsahuje brambli řádu alespoň $k + 1$. („Slabá dualita.“)

Nápověda k 1: využijte simpliciální vrcholy.

Nápověda k 8: Využijte předchozí cvičení. Napřed je ale potřeba graf trochu rozsekat – najít množinu X velikosti $O(\sqrt{n})$, pro kterou každá komponenta $G - X$ má poloměr $O(\sqrt{n})$. K tomu použijte prohledávání do šířky.

Nápověda k 11: Dokažte indukcí o něco silnější tvrzení: pro každou množinu $W \subseteq V(G)$ velikosti $\leq 2k+1$ existuje stromový rozklad $(T, \mathcal{V})$ o šířce $\leq 3k$, pro který jedna z částí obsahuje W.