

1. Necht  $p$  je prvočíslo. Ukažte, že je-li průměrný stupeň multigrafu  $G$  větší než  $2p - 2$ , pak  $G$  má neprázdný podmultigraf, v němž stupně všech vrcholů jsou dělitelné  $p$ .
2. Graf je *skoro  $d$ -regulární*, mají-li všechny jeho vrcholy stupeň  $d$  nebo  $d + 1$ . Ukažte, že je-li  $G$  skoro  $d$ -regulární, ale žádný jeho podgraf není skoro  $d$ -regulární, pak v  $G$  existuje párování pokrývající všechny vrcholy stupně  $d + 1$ .
3. Ukažte, že je-li  $G$  skoro  $d$ -regulární, pak  $G$  má podgraf s množinou vrcholů  $V(G)$ , který je skoro  $(d - 1)$ -regulární, ale není  $(d - 1)$ -regulární.
4. Ukažte, že je-li  $G$  skoro  $d$ -regulární graf pro  $d \geq 4$  a  $G$  není 4-regulární, pak  $G$  má 3-regulární podgraf.

5. Nalezněte souvislý graf  $G$ , který má orientaci v níž je vstupní stupeň každého vrcholu 2, koeficient u  $x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2$  v jeho polynomu je 0, a přesto je  $G$  3-vybíravý.
6. Necht  $v_1, \dots, v_n$  je pořadí vrcholů grafu  $G$  takové, že  $v_1 v_2 \in E(G)$  a pro  $i \geq 3$  má  $v_i$  právě dva sousedy mezi  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ . Necht

$$p_G = \prod_{v_i v_j \in E(G), i < j} (x_j - x_i)$$

je grafový polynom  $G$  v proměnných  $x_1, \dots, x_n$ . Pro libovolnou funkci  $f : [n] \rightarrow N$  budiž  $c(f, G)$  koeficient  $p_G$  u členu  $x_1^{2-f(1)} x_2^{2-f(2)} \dots x_n^{2-f(n)}$  (je-li  $f(x) > 2$  pro nějaké  $x \in [n]$ , pak  $c(f, G) = 0$ ). Necht  $e_i : [n] \rightarrow N$  je funkce tž.  $e_i(i) = 1$  a  $e_i(x) = 0$  pro  $x \in [n] \setminus \{i\}$ . Označme  $\tilde{c}(f, G) = c(f + e_2, G) - c(f + e_1, G)$ .

Ukažte indukcí pro  $n \geq 2$ , že splňuje-li  $f$  podmínku  $\sum_{x \in [n]} f(x) = 2$ , pak  $\tilde{c}(f, G) \equiv 1 \pmod{3}$ .

7. Necht  $G$  je 2-degenerovaný,  $v_0$  je vrchol  $G$  a  $L$  je přiřazení seznamů vrcholům  $G$  tž.  $|L(v)| \geq 3$  pro  $v \in V(G) \setminus \{v_0\}$  a  $|L(v_0)| = 1$ . Ukažte, že  $G$  je  $L$ -obarvitelný.