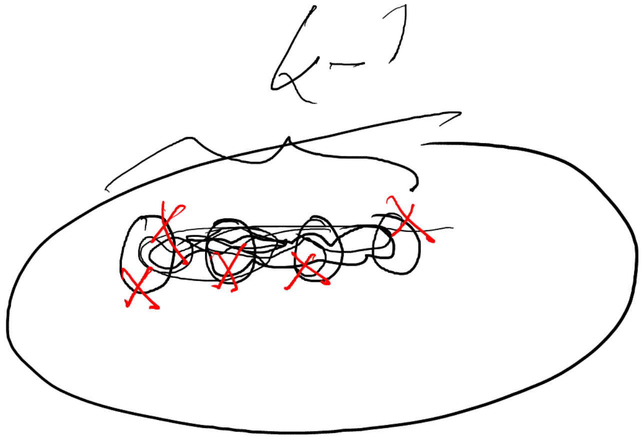
Pakování & pokrývání

Pakování vrch.-disj. kopií K_2 .... párování

- Hallova věta
- Tuttova věta



Pakování vrch.-disj. cyklů

- Erdős-Pósa thm

$\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.ž. $\forall k \forall G$ buď G má k disj. cyklů → detekce?

nebo $G \setminus X$ nemá cykly pro $|X| \leq f(k)$ → důkaz?

Pakování hr.-disj. cest
vrch. skoro disj. cest] ⟺ hr. souvislost / vrch. souvislost

„Pakování or. cest"

- Max. tok = min. řez

pak. orient. cest — pokrytí všech cest

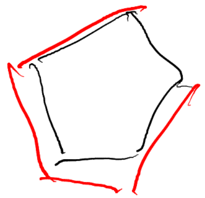
Pakování koster (& pokrývání)

Kolik hranově disj. koster lze nalézt v daném grafu G? **DK** MAX

Kolik koster je třeba na pokrytí všech hran G? **PK** MIN

Motivace: když mám k hr. disj. koster, mám také k hr. disj. cest $u \to v$ & umím je rychle najít.

Takže k hr. d. k. $\Rightarrow$ hr. k-souvislost

$\not\Leftarrow$ (k=2: )

Jiný důsledek (bez nutné podm.):

DK $\Rightarrow$ $\forall$ rozklad $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_r$ má každá kostra $\geq r-1$ hran mezi

$\Rightarrow$ celý graf $\geq k(r-1)$ –//–

Věta 1 (Nash-Williams, Tutte 1961)

Multigraf má k hr. disj. koster $\Leftrightarrow$
$\forall$ rozklad na r částí je $\geq k(r-1)$ hran mezi částmi.

Důsledek: hranově $2k$-souvislost $\Rightarrow$ ex. k hr. disj. koster

Dk $\underbrace{O\,O \dots O}$
r částí, $\forall$ mezi „stupeň" $\geq 2k$

$\Rightarrow$ $\geq r \cdot 2k \cdot \frac{1}{2} = rk$ hran mezi + Věta

PK $\Rightarrow$ $\forall U \subseteq V(G)$

$\|G[U]\| \leq k(|U|-1)$

Věta 2 (Nash-Williams 1964)

Hrany multigrafu G lze pokrýt $\leq k$ kostrami

$\Updownarrow$

$\forall U \overset{\neq\emptyset}{\subseteq} V(G)$ $\|G[U]\| \leq k(|U|-1)$

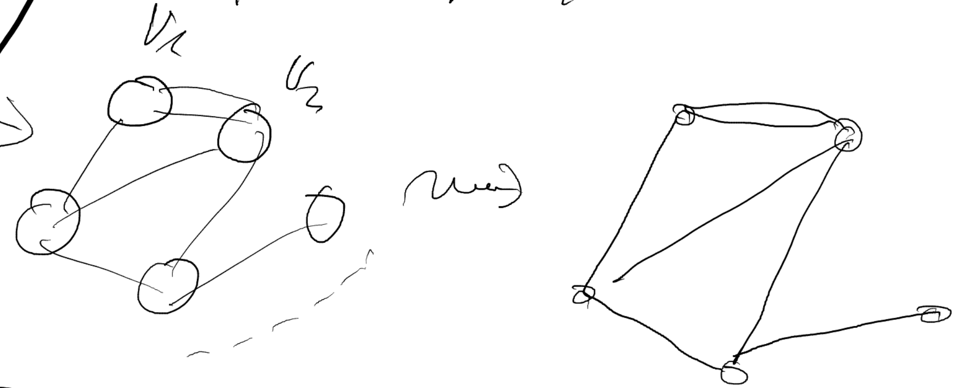
Def arboricita G = min k t.ž. $E(G)$ lze pokrýt k kostrami

Věta 3 $\forall G$ – souv. multigraf $G=(V,E)$ $\forall k$ $\exists$ rozklad P t.ž.:

1. $\forall U \in P$ $G[U]$ má k hr.-disj. koster
2. G/P lze pokrýt k kostrami

$P = \{V_1, \dots, V_k\}$ t.ž.:

$V_i \neq \emptyset$ & $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$



Věta 3 $\Rightarrow$ Věta 1

P – rozklad z Věty 3

Dle předp. V1 $\|G/P\| \geq k(|P|-1)$

& G/P je pokryt k kostrami

→ k disj. koster

spojíme s disj. kostrami "uvnitř částí"

Věta 3 $\Rightarrow$ Věta 2

P – rozklad z Věty 3

Dle předp. V2 $\|G[V_i]\| \leq k(|V_i|-1)$

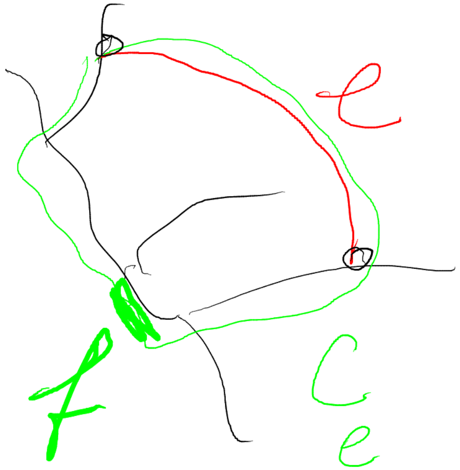
$G[V_i]$ má k hr.-disj. koster $\Rightarrow$ je jimi pokryt

spojíme s kostrami v G/P

$T \rightsquigarrow$ kostra

$e \notin E(T) \rightsquigarrow$ tětiva

$f \in C_e \rightsquigarrow$ fund. cyklus



$T' = T + e - f \rightsquigarrow$ kostra vzniklá výměnou f za e

$\mathcal{T} = (T_1, \dots, T_k)$ k-tice koster

$e_0, \dots, e_n$ je výměnný řetěz pro $\mathcal{T}$ začínající e_0:

$e_n \notin E(T_j)$ $\forall j$

$\forall i < n$ $\exists j = j(i)$: $e_i \in T_j$ & e_{i+1} je tětiva v T_j, jejíž fund. cyklus obsahuje e_i (pro T_j)

$E(\mathcal{T}) := \bigcup_{i=1}^{k} E(T_i)$

Spec. příp.: $n = 0$, $e_0 \notin E(\mathcal{T})$

Lemma e_0 začíná nejv. výměnný řetěz pro T

& e_0 je ve dvou kostrách v T

$\Rightarrow \exists T'$ ... k-tice koster t.ž. $E(T) \subsetneq E(T')$.

Dk $e_0, \dots, e_n$ výměnný řetěz min. délky zač. e_0

$\Rightarrow e_i$ není ve fund. cyklu e_l pro $l > i+1$ (jinak $e_0, \dots, e_i, e_l, e_{l+1}, \dots$)

Definujeme posl. T^i: (1) $T^0 = T$

(2) $T^i = (T_1^i, \dots, T_k^i) \leadsto T^{i+1} = (T_1^{i+1}, \dots, T_k^{i+1})$

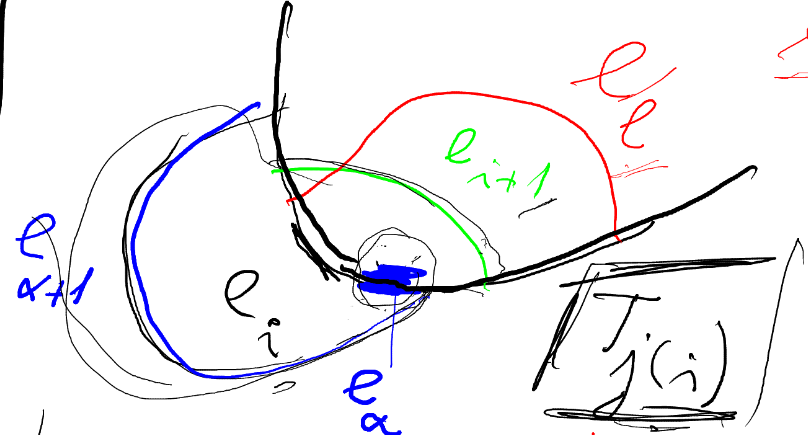
$\longrightarrow$ $T_j^{i+1} = T_j^i + e_{i+1} - e_i$ pro $j = j(i)$ ---- $C_{e_{i+1}}$ v T_j^i a v T_j je stejný

$\Downarrow$ T_j^{i+1} je kostra!

$T_j^{i+1} = T_j^i$ pro $j \neq j(i)$

$E(T^n) = E(T) \cup \{e_n\}$

$T' := T^n$ ■



$l > i+1$

$e_0, e_1, \dots, e_i, \cancel{e_{i+1}}, e_l, \dots, e_n$

$\alpha < i$ & $j(\alpha) = j(i)$

$\alpha + 1 < i + 1$

Věta 3 $\forall G$ – souv. multigraf $G=(V,E)$ $\forall k$ $\exists$ rozklad P t.ž.

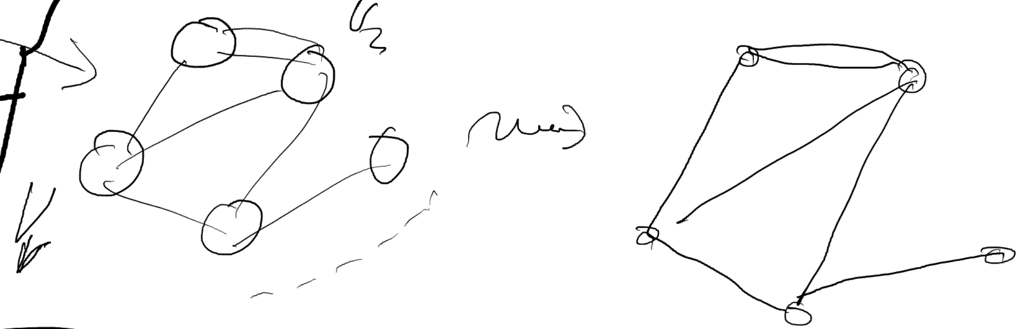
$\to P = \{V_1, \dots, V_k\}$ t.ž.

$V_i \neq \emptyset$ & $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$

① $\forall U \in P$ $G[U]$ má k hr.-disj. koster

② G/P lze pokrýt k kostrami

V_1 V_2



Dk $T = (T_1, \dots, T_k)$ k koster t.ž.

$E(T)$ je max.

$D = \{e \in E(G) : e = e$ zadní větev$\}$ — speci: $E(G) \setminus E(T) \subseteq D$ $(n=0)$

P: rozklad na komp. souvislosti (V, D) $V_1, \dots, V_r$

Háček!

$\to$ hrany mezi V_i, V_j nejsou v D $\Rightarrow$ jsou v $E(T)$ $\Rightarrow$ ② funguje ($T_1/P, \dots, T_k/P$)

$\to$ $S_j = T_j[V_i] \cap D$ … les v V_i; $S_1, \dots, S_k$ hr. disj. (!)

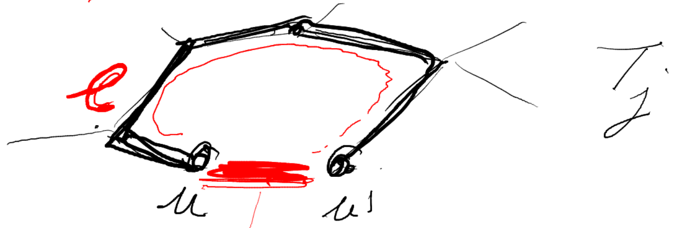
? S_j souvislý ? $\leftarrow$

S_j je souvislý?

sporem: $\forall u, u' \in V_1$ $\quad uu' \in D \Rightarrow \exists$ cesta $u \dots u'$ v S_j

$\rightarrow uu' \in T_j \Rightarrow uu' \in S_j$ ✓

$\rightarrow uu' \notin T_j \rightarrow$ najdu cestu $u \dots u'$ v T_j ..... leží celá v D?



$e_0 \in D$

$\exists e_0, e_1, \dots, e_n$ řetěz výměn

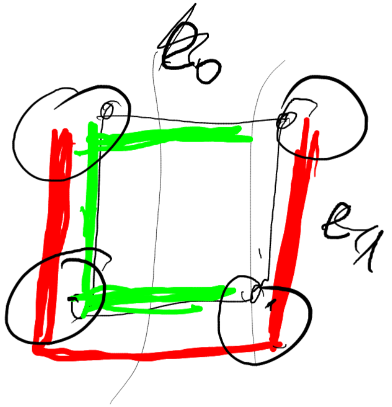
$e, e_0, e_1, \dots, e_n$ řetěz výměn

$(e \in T_j \neq e_0)$

$e \in C_{e_0}$ v T_j

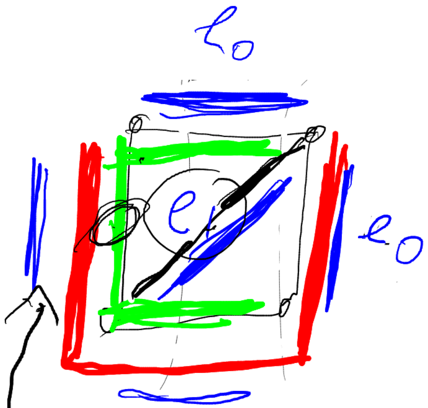
$e \in D$

S_j je souvislý $\Rightarrow T_j / V_1$ je strom

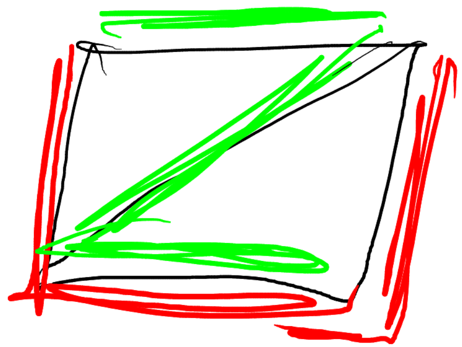


$k=2$

$D \sim \emptyset$



$D \rightsquigarrow$



$D = \emptyset$

$E(G)$ covered

Ausgebrane Lemmata

e_0, e_1

Další podobná věta   Gallai, Milgram 1960

$\forall G$ … or. graf

$\exists P_1, \dots, P_k$ or. cesty, disjunktní

t.ž. $V(G) = \bigcup V(P_i)$

$\exists v_1 \in V(P_1), \dots, v_k \in V(P_k)$ t.ž. $\{v_1, \dots, v_k\}$ je nezávislá množina.

---

spec. př.: G bip.

$\exists e_1, \dots, e_k$ hrany,

$\exists v_1 \in e_1 \dots v_k \in e_k$