Kombinatorické etudy 3 – LS 2014/2015

1. (3.5) Opět zvolíme náhodnou permutaci čísel 1, 2, ..., n. Jaká je střední hodnota počtu cyklů?

2. (6.28 – zbylo z minula) Každý hranově 2-souvislý graf lze vytvořit z kružnice postupným přidáváním "uší". Pořádně: graf G je sjednocením $G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$, kde G_1 je kružnice, a každý G_i ($i > 1$) je buď cesta, která má s $G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1}$ společné jen své konce, nebo kružnice, která má s $G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1}$ společný jeden vrchol.

3. (6.29) Graf G lze zorientovat tak, aby výsledek byl silně souvislý ("souvislý i při respektování orientace hran") právě tehdy, když je G hranově 2-souvislý.

Graf nazveme *hranově kriticky k-barevný*, pokud jeho vrcholy lze dobře obarvit k barvami ale ne $k-1$ barvami a zároveň po odebrání libovolné hrany lze vrcholy obarvit $k-1$ barvami.

Graf nazveme *vrcholově kriticky k-barevný*, pokud jeho vrcholy lze dobře obarvit k barvami, ale ne $k-1$ barvami a zároveň po odebrání libovolného vrcholu lze vrcholy obarvit $k-1$ barvami.

Pojmem kriticky k-barevný graf budeme od teď rozumět (jak je zvykem) hranově kriticky k-barevný. (V předchozích sériích tomu tak mělo být také – omlouvám se za nedopatření. Můžete si zkusit rozmyslet, jestli předvedená řešení fungují i pro silnější pojem hranové kritičnosti.)

4. (9.17 – zbyla část c) Graf nazveme *kriticky k-barevný*, pokud jeho vrcholy lze dobře obarvit k barvami ale ne $k-1$ barvami a zároveň po odebrání libovolného vrcholu lze zbylé vrcholy obarvit $k-1$ barvami.

(a) Které grafy jsou kriticky 3-barevné?
(b) Zkonstruujte kriticky 4-barevný graf se $4n$ vrcholy a alespoň n^2 hranami.
(c) Zkonstruujte kriticky 6-barevný graf s $2n$ vrcholy a minimálním stupněm alespoň n.

5. (9.19)

(a) Buď G graf K_4 s podrozdělenou jednou hranou. Je G indukovaný podgraf nějakého kriticky 4-barevného grafu?

(b) Graf G je podgraf (nebo indukovaný podgraf) nějakého kriticky $(k+1)$-barevného grafu právě tehdy, když pro každou hranu e platí $\chi(G/e_0) \leq k$.

6. (11.35) (zbylo z minula) (Popis toho, jak fungují náhodné procházky po grafech – viz 1. série. Uvažujeme jen souvislé grafy!)

(a) Najděte takovou distribuci pro v_0 (počáteční stav), že distribuce v_k (k-tého kroku) je stejná pro všechna k (tzv. stacionární rozdělení).
(b) Dokažte, že stacionární rozdělení je právě jedno.
(c) Pokud G není bipartitní, tak (pro každé v_0) rozdělení v_k konverguje ke stacionárnímu rozdělení. Pro bipartitní grafy to neplatí (leda by G měl jen jeden vrchol).

7. (14.8) * Obarvíme každý z bodů v rovině jednou ze dvou barev. Předpokládejte, že existuje rovnostranný trojúhelník s hranou 1, jehož všechny vrcholy mají stejnou barvu. Ukažte, že pro každé $a, b > 0$ splňující trojúhelníkovou nerovnost existuje trojúhelník s hranami 1, a, b, jehož všechny vrcholy mají stejnou barvu. (Aby existoval vůbec nějaký takový trojúhelník, musí být $|a-b| < 1 < a+b$. Cílem je ukázat, že existuje i "jednobarevný" takový trojúhelník.)

8. Ukažte, že vrcholy libovolného grafu lze obarvit červeně a modře tak, že nejvýše polovina hran má oba konce stejné barvy. Dále ukažte, že existuje obarvení, kde nejvýše třetina hran má oba konce červené **a současně** nejvýše třetina hran má oba konce modré. (Pokud se vám nedaří dokázat polovinu/třetinu, zkuste slabší výsledek. Jsou polovina, resp. třetina nejlepší možné?)
Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`