

## Kombinatorické etudy 1 – ZS 2014/2015

**1.** (3.3) Zvolíme náhodnou permutaci čísel  $1, 2, \dots, n$  (tak, že všechny permutace mají stejnou pravděpodobnost zvolení). Jaká je pravděpodobnost, že cyklus obsahující 1 má délku  $k$ ?

**2.** (6.27) Nazvěme dvě hrany hranově 2-souvislého grafu *ekvivalentní* pokud jsou stejné, nebo jejich odstranění učiní graf nesouvislým. Ukažte, že:

- Jedná se o relaci ekvivalence.
- Všechny hrany jedné ekvivalenční třídy leží na cyklu (který však může obsahovat i další hrany).
- Po odstranění všech hran jedné ekvivalenční třídy  $P$  nám zbydou 2-souvislé komponenty.
- Po kontrakci všech komponent  $G - P$  získáme kružnici.

**3.** (9.17) Graf nazveme *kriticky  $k$ -barevný*, pokud jeho vrcholy lze dobře obarvit  $k$  barvami ale ne  $k - 1$  barvami a zároveň po odebrání libovolného vrcholu lze zbylé vrcholy obarvit  $k - 1$  barvami.

- Které grafy jsou kriticky 3-barevné?
- Zkonstruuje kriticky 4-barevný graf se  $4n$  vrcholy a alespoň  $n^2$  hranami.
- Zkonstruuje kriticky 6-barevný graf s  $2n$  vrcholy a minimálním stupněm alespoň  $n$ .

**4.** (11.34) Pro tuto úlohu i úlohy navazující:  $G$  je souvislý graf s  $n$  vrcholy a  $m$  hranami,  $(v_0, \dots, v_k, \dots)$  je náhodná procházka pro  $G$ : náhodná volba nekonečné posloupnosti vrcholů grafu, přičemž platí, že  $v_{k+1}$  je některý ze sousedů  $v_k$ , a všichni sousedé mají stejnou pravděpodobnost. *Distribucí* vrcholu  $v_k$  rozumíme soubor čísel  $(p_k^u)_{u \in V(G)}$ , která pro každý vrchol  $u$  grafu  $G$  udávají pravděpodobnost, že  $v_k = u$ .

Vyjádřete distribuci  $v_k$  pomocí distribuce  $v_0$ , stupňů grafu a jeho matice sousednosti.

**5.** (14.7) Obarvíme každý z bodů v rovině jednou ze tří barev. Ukažte, že budou existovat dva body se stejnou barvou ve vzdálenosti 1.

**6.** Dva hráči hráli spravedlivou náhodnou hru (každý má poloviční šanci na výhru). Dohodli se, že kdo první vyhraje šest bodů, vyhraje (celý) koláč. Z časových důvodů museli hru přerušit za stavu 5:3. Jaké je spravedlivé rozdělení koláče na základě tohoto mezivýsledku? (A jak je to obecně?)

Nápověda na: <http://kam.mff.cuni.cz/~sama1/vyuka/ke/>