PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODA 2

ZS 2013/14 soubor úloh č. 4

((**dle dohody**) nápověda, **31.8.2014** řešení)

Zápočet: ≥ 36 b, zkouška: ≥ 60 b. Za příklady dodané před návodem je dvojnásobek, po předvedení řešení dostanete jen 2/3 bodů.

1. Buď V nějaký d-rozměrný podprostor $\mathbb{R}^n$. Buď dále $v \in \{-1, +1\}^n$ náhodný vektor. Označme $X = \operatorname{dist}(v, V)$.

   (a) Spočtěte $\mathbb{E}\, X^2$.

   (b) Dokažte koncentraci X: pro vhodné m dokažte, že (pro vhodné $c_1, c_2 > 0$)

   $$\Pr[|X - m| \geq t] \leq c_1 e^{-c_2 t^2}$$

   4

2. Dokažte, že existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro všechna $n > 1$ existuje interval I_n s nejvýše $cn/\log n$ po sobě jdoucími celými čísly takový, že

   $$\Pr[\chi(G(n, \frac{1}{2})) \in I_n] \geq 0.99\,.$$

   4

3. Ukažte, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $C = C(\varepsilon)$ takové, že každá množina S s alespoň $\varepsilon 3^n$ vektory z $\mathbb{Z}_3^n$ obsahuje tři vektory, jejichž vzájemná (Hammingovská) vzdálenost je alespoň $n - C\sqrt{n}$. **4**

4. Najděte prahovou funkci pro vlastnost $G(n, p)$ obsahuje alespoň $n/8$ vrcholově disjunktních kopií K_4. **5**

5. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 = n_0(\varepsilon)$ takové, že pro všechna $n > n_0$ existuje graf s n vrcholy, který obsahuje každý graf s $k \geq (2-\varepsilon)\log_2 n$ vrcholy jako indukovaný podgraf.

   3

6. Systém množin $\mathcal{S}$ je *protínací* pokud se každé dvě množiny v $\mathcal{S}$ protínají. Buďte $\mathcal{S}_1$, …, $\mathcal{S}_k$ protínací systémy množin. Pak platí

   $$\left|\cup_{i=1}^k \mathcal{S}_i\right| \leq 2^n - 2^{n-k}\,.$$

   3

7. Označme p_k pravděpodobnost, že v náhodném grafu $G(2k, 1/2)$ je maximální stupeň nejvýše $k - 1$. Dokažte, že $p_k \geq 4^{-k}$. **2**