

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODA 2

ZS 2013/14 soubor úloh č. 1

(24.10. nápověda, 31.10. řešení)

Zápočet: ≥ 36 b, zkouška: ≥ 60 b. Za příklady dodané před návodem je dvojnásobek, po předvedení řešení dostanete jen 2/3 bodů.

1. Bud' H hypergraf, přičemž

$$\sum_{e \in E(H)} \frac{1}{4^{|e|-1}} < 1.$$

Ukažte, že existuje dobré obarvení H (tj. žádná monochromatická hrana) pomocí čtyř barev. **2**

2. Na přednášce jsme si ukázali, že algoritmus (pro splnitelnost příslušné formule, ale to je teď jedno) skončí po $m + 2$ krocích s pravděpodobností $3/4$.

(a) Odvoďte, jaký je střední počet kroků algoritmu. **1**

(b) Ukažte (pro vhodnou funkci $\varepsilon \mapsto T_\varepsilon$), že algoritmus skončí v čase T_ε s pravděpodobností $1 - \varepsilon$ (pro $\varepsilon > 0$). **1**

3. Bud' G graf s maximálním stupněm Δ . Ukažte, že je možné jeho *vrcholy* obarvit pomocí $O(\Delta^{4/3})$ barev tak, že žádné dva sousední vrcholy nemají tutéž barvu a žádná cesta s pěti vrcholy nepoužívá jen dvě barvy. Použijte obecnou verzi Lokálního lemmatu. **4**

4. Řešte minulou úlohu metodou komprese entropie (tj. podobně, jako jsme na přednášce řešili splnitelnost formulí). **3**

Nalezněte algoritmus, který úlohu vyřeší se střední dobou běhu polynomiální. **2**

5. Bud' X náhodná veličina na konečném pravděpodobnostním prostoru; necht' X nabývá hodnoty x_i s pravděpodobností p_i pro $i = 1, \dots, k$.

Definujme její *entropii* $H(X)$ pomocí vzorce

$$H(X) = \sum_{i=1}^k -p_i \log_2 p_i.$$

Je-li nyní Y druhá náhodná veličina, tak $H(X, Y)$ značí entropii náhodného vektoru s první složkou X a druhou Y . Dokažte, že $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$. Přitom rovnost nastává právě tehdy, když jsou X a Y nezávislé veličiny. **4**

- 1 Přímočará modifikace důkazu z přednášky. Rozhodujte o barvách vrcholů jeden po druhém, vždy použijte výpočet podmíněných pravděpodobností.
- 2 (a) Když opakovaně házíme mincí s pravděpodobností úspěchu p , kolikrát musíme průměrně hodit, než uspějeme?
- 3 Použijte obecnou verzi LLL. Špatné jevy budou dvou typů: pro dvojici sousedních vrcholů u, v jev $B_{u,v}$ říká, že u a v mají stejnou barvu. Pro cestu P s pěti vrcholy jev C_P říká, že P je obarvena barvami i, j, i, j, i . Zjistěte pravděpodobnosti jednotlivých jevů a počty hran v závislostním grafu. Parametry x volte jako vhodná konstanta krát příslušná pravděpodobnost. Jde také použít na přednášce zmíněná verze: Asymetrické lokální lemma.
- 4 Podobně jako v příkladech na přednášce: nalezněte vhodný způsob “logování” průběhu přirozeného výpočtu.
- 5 Rezeptejte $H(X) + H(Y) - H(X, Y)$ podle definice a použijte Jensenovu nerovnost.