Kombinatorické etudy 8 – LS 2013/2014

1. (3.20) Buď n pevné. Označme a_k počet permutací $[n]$ ($= \{1,\dots,n\}$), které mají právě k inverzí. Ukažte, že

$$\sum_k a_k x^k = (1+x)(1+x+x^2)\dots(1+x+\cdots+x^{n-1})\,.$$

2. (4.25)

(a) Buď G orientovaný graf bez 2-cyklů, buď A jeho orientovaná matice sousednosti: je-li (i,j) hrana, pak $A_{i,j} = 1$, $A_{j,i} = -1$; na místech neodpovídajících hranám jsou nuly.

Dokažte, že počet perfektních párování je alespoň $|\operatorname{Pf} A|$.

(b) Pro každý orientovaný graf jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (a) $|\operatorname{Pf} A|$ je rovno počtu perfektních párování;
- (b) Pokud kružnice C je střídavá vzhledem k některému perfektnímu párování G, tak má v obou směrech lichý počet hran.
- (c) Buď M_0 pevné perfektní párování. Pokud kružnice C je střídavá vzhledem k M_0, tak má v obou směrech lichý počet hran.

3. (9.31) Pokud pro G_1 i G_2 platí $\chi(G_i) = \omega(G_i)$, tak to platí i pro jejich silný součin $G_1 \boxtimes G_2$.

4. (10.35) Buď G graf neobsahující K_{k+1}. Ukažte, že existuje k-barevný graf H s vrcholy $V(G)$ takový, že každý $v \in V(G)$ splňuje $\deg_H(v) \ge \deg_G(v)$. Odvoďte odsud Turánovu větu.

5. (14.14 – už to skoro máme!)*

(a) Mějme opět obarveny k barvami všechny podmnožiny n-prvkové množiny S, přičemž $n \ge N(k,t)$. Ukažte, že existují disjunktní množiny $A_1, B_1, \dots, A_t, B_t$ takové, že pro libovolnou pevnou posloupnost $1 \le i_1 < \cdots < i_\ell \le t$ všechna sjednocení ve tvaru $C_{i_1} \cup \cdots \cup C_{i_\ell}$ (kde každé C_i je jedno z A_i, B_i nebo $A_i \cup B_i$) mají stejnou barvu.

(b) Dokažte, že pro libovolná k, r existuje $n = n(k,r)$ s následující vlastností: kdykoli je množina všech podmnožin n-prvkové množiny S obarvena k barvami, tak existují neprázdné disjunktní množiny $X_1, \dots, X_r \subseteq S$ takové, že všechna neprázdná sjednocení některých z nich mají tutéž barvu.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`