Kombinatorické etudy 11 – LS 2013/2014

Nápovědy

1. (a) Použijte tvrzení z prvního týdne (o autu na kruhové dráze). Dále: není třeba hledat přímo bijekci mezi permutacemi. (To taky jde, ale je potřeba navíc předpokládat, že $x_1, \ldots, x_n$ jsou nezávislá nad $\mathbb{Z}$ – rovnice $\sum_i a_i x_i = 0$ je platná jen pokud jsou všechna $a_i = 0$. A důkaz je pak trošku jiný než je dále napovězeno.) Nazvěme posloupnost $j_1, j_2, ..., j_k$ (navzájem různých čísel z $1, \ldots, n$) *rostoucí* pokud (1) $x_{j_1} + ... + x_{j_k} > 0$ a (2) $x_{j_1} + ... + x_{j_l} \le 0$ pro všechna $l < k$. (Pro $k = 1$ je j_1 rostoucí pokud $x_{j_1} > 0$.)

Posloupnost nazveme *klesající* pokud (1) $x_{j_1} + ... + x_{j_k} \le 0$ a (2) $x_{j_l} + ... + x_{j_k} > 0$ pro všechna $l > 1$. (Všimněte si drobných rozdílů!) Rozdělte $x_1, ..., x_n$ na rostoucí a klesající posloupnosti a pomocí toho rozdělení vytvořte vhodné permutace, pro něž budete rozumět číslům $a()$, $b()$.

(b) Užijte část (a), kde $n = 2m$, polovina x_i je $+1$ a polovina -1.

2. Použijte Pfaffiány, podobně jako u žebříku z minule. Detaily níže.

3. Všechny kromě součinu dvou perfektních grafů.

4. Počítejte dvěma způsoby počet podgrafů $K_{1,r}$.

5. (a) Napřed vyberte velkou množinu T a disjunktní množiny $A_1, B_1 \subseteq S \setminus T$ takové, že pro všechna $X \subseteq T$ jsou barvy $A_1 \cup X$, $B_1 \cup X$ a $A_1 \cup B_1 \cup X$ stejné. (b) Buď t v části (a) velké. Obarvěte množinu $\{i_1, \ldots, i_\ell\} \subseteq \{1, \ldots, t\}$ barvou $A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_\ell}$.

(a) Použitím souvislosti determinantů, Pfafiánů a počtu párování napište a_n^2 ve tvaru $\det p_n(A)$, kde polynom $p_n(\lambda)$ je charakteristický polynom neorientované cesty, a A je matice sousednosti orientované cesty. Tj.

$$p_n(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Všimněte si toho, že vzorec z (a) je resultant dvou polynomů a použijte Sylvestrovu formuli. (c) Užijte (a), abyste zjistili, že $\frac{\log a_n}{n^2}$ je suma aproximující

$$\frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \log(4\cos^2 x + 4\cos^2 y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$