# Kombinatorické etudy 6 – ZS 2012/2013

**1.** (1.34) Buď $1 \le r \le n$. Ukažte, že počet posloupností $(x_1, \ldots, \overset{x\_r}{\cancel{x_5}})$, kde $1 \le x_i \le n$ pro každé $n$, a které pro každé $i = 1, \ldots, n$ obsahují méně než $i$ hodnot z $\{1, \ldots, i\}$ je $(n-r)n^{r-1}$.

**2.** (4.9) (a) Buď $G$ digraf bez smyček, $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Buď $A$ incidenční matice, tj.

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{když } e_j \text{ vede do } v_i, \\ -1 & \text{když } e_j \text{ vede z } v_i, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Označme $A_0$ matici vzniklou z $A$ odebráním prvního řádku. Dokažte, že počet koster $G$ je $\det(A_0 A_0^T)$.

(b) Jaká čísla jsou v $A_0 A_0^T$?

(c) Odvoďte odsud ~~Cauchyho~~ Cayleyho vzorec pro počet stromů na $n$ vrcholech.

**3.** (7.5) Buď $G$ bipartitní graf s partitami $A$, $B$. Označme

$$\delta = \max\{|X| - |N_G(X)| : X \subseteq A\}\,.$$

Ukažte, že $\nu(G) = |A| - \delta$.

**4.** (8.11) Buďte $T_1, \ldots, T_k$ maximální nezávislé množiny v grafu $G$ a $X$ jakákoliv nezávislá množina v $G$. Položme $S = X \cap T_1 \cap \cdots \cap T_k$. Ukažte, že

$$|N(S)| - |S| \le |N(X)| - |X|\,.$$

(Zde $N(S)$ je množina vrcholů sousedících s alespoň jedním vrcholem z $S$.)

**5.** (13.35) (zůstalo z minula, poslední šance)

Popište všechny hypergrafy, ve kterých každé dvě hrany mají přesně jeden společný bod, a které nejsou 2-obarvitelné.

**6.** (13.36) Buď $H$ 3-uniformní hypergraf s $n \ge 5$ vrcholy, kde každá dvojice vrcholů je obsažena ve stejném (nenulovém) počtu hran. Ukažte, že $H$ není 2-obarvitelný.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`