Kombinatorické etudy 3 – LS 2012/2013

1. (1.6 – zbylo z minula, chybí část (d))

Stirlingovo rozkladové číslo $\left\{ {n \atop k} \right\}$ (též $S(n,k)$, Stirlingovo číslo druhého druhu) značí počet rozkladů množiny $\{1,\ldots,n\}$ na k neprázdných množin; jinak řečeno, je to počet ekvivalencí na n-prvkové množině s k třídami ekvivalence.

Stirlingovo permutační číslo $\left[{n \atop k} \right]$ značí počet permutací množiny $\{1,\ldots,n\}$ s právě k cykly. (Jako Stirlingovo číslo prvního druhu se označuje $s(n,k) = (-1)^{n-k}\left[{n \atop k} \right]$.)

(a) Najděte rekurentní relaci pro $\left\{ {n \atop k} \right\}$ i pro $\left[{n \atop k} \right]$, a sestavte jejich tabulku pro $n \le 6$.

(b) Dokažte, že $\left\{ {n \atop n-k} \right\}$ i $\left[{n \atop n-k} \right]$ jsou pro pevné k polynomy v n.

(c) Ukažte, že rekurence z části (a) definuje jednoznačně Stirlingova čísla pro všechna *celá* n, k, zadáme-li počáteční podmínky $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = \left[{0 \atop 0} \right] = 1$ a $\left\{ {0 \atop m} \right\} = \left[{m \atop 0} \right] = 0$ (pro $m \ne 0$).

(d) Dokažte vztah

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left[{-k \atop -n} \right].$$

2. (3.5) Zvolíme náhodnou permutaci čísel 1, 2, ..., n. Jaká je střední hodnota počtu cyklů?

3. (5.6) Pokud je orientovaný graf slabě souvislý (tj. souvislý, když smíme chodit i proti šipkám) a každý vrchol má stejný vstupní i výstupní stupeň, tak je tento graf eulerovský.

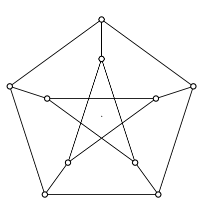
4. (6.4) Ukažte, že součin (neorientovaných grafů) $G_1 \times G_2$ je souvislý právě tehdy, když jsou souvislé G_1 i G_2 a jeden z nich obsahuje lichý cyklus. (Součin $G_1 \times G_2$ má za vrcholy dvojice, přitom vrcholy (x_1, x_2) a (y_1, y_2) jsou spojeny hranou, právě když pro $i = 1, 2$ je $x_i y_i$ hrana v G_i.)

5. (11.1 – zbylo z minula, zbývají vlastní čísla C_n) Vlastní číslo a vektor grafu G znamená vlastní číslo a vektor matice sousednosti A_G. Některé vlastnosti grafu lze z vyčíst z jeho vlastních čísel, začneme ale opatrně:

Určete vlastní čísla a vlastní vektory úplného grafu K_n, hvězdy S_n, úplného bipartitního grafu $K_{m,n}$ a cyklu C_n.

6. (11.2) Uvažme regulární graf G (všechny stupně stejné), pro který známe jeho vlastní čísla. Jaká jsou vlastní čísla

1. doplňku $\bar{G}$;
2. hranového grafu $L(G)$?
3. Určete spektrum (vlastní čísla a jejich násobností) Petersenova grafu (viz obrázek).



7. (7.22) Buď G graf s $2n$ vrcholy a všemi stupni alespoň n. Ukažte, že G má perfektní párování.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`