

Kombinatorické etudy 3 – LS 2012/2013

Nápovědy

1. (a) Možné rekurence jsou

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

$$\left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right] + n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$$

(b) Všimněte si, že při rozkladu n prvků na $n-k$ rozkladových tříd je aspoň $n-2k$ tříd jednoprvkových.

(c) Použijte rekurenci v části (a).

(d) Čísla $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ i $\left[\begin{matrix} -k \\ -n \end{matrix} \right]$ splňují stejnou rekurenci i stejné počáteční podmínky.

2. Zase to divné kódování ... Nebo méně trikově: jaký je střední počet bodů, které leží v k -cyklech?
3. Uvažte maximální uzavřený tah a ukažte, že obsahuje všechny hrany.
4. Pokud nějaký graf obsahuje lichý cyklus, ukažte že v něm mezi libovolnými dvěma body existuje cesta libovolné dostatečně dlouhé délky. Využijte toho.
5. Rozmyslete si kombinatorický význam vlastních čísel, tj. přeložte tento pojem z řeči 'násobení matic' do řeči 'psaní čísel na graf'.
6. 1. využijte toho, že $(1, \dots, 1)$ je vlastní vektor a ostatní vl.vektory jsou na něj kolmé.
2. Buď B matice incidence (vrchol - hrana), A_G matice sousednosti grafu G a $A_{L(G)}$ matice sousednosti jeho hranového grafu. Odvoďte a využijte vztahy

$$A_G = BB^T - dI \quad A_{L(G)} = B^T B - 2I.$$

3. Petersenův graf je $\overline{L(K_5)}$.

7. Sporem: Buď F maximální párování a u, v dva vrcholy, které nejsou pokryté. Kolika hranami může být množina $\{u, v\}$ připojena k nějaké hraně z F ?