Kombinatorické etudy 7 – ZS 2011/2012

1. (4.3) Označme

$$p_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_T \prod_i x_i^{\deg_T(v_i)-1},$$

kde sčítání probíhá přes všechny stromy T s danou množinou vrcholů. Odvoďte (bez použití předchozích částí), že $p_n(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n)^{n-2}$. Z toho odvoďte Cayleyho formuli pro počet stromů na n vrcholech.

2. (6.34) Buďte p, q vrcholy v 2-souvislém grafu G. Ukažte, že G lze zorientovat tak, že každá hrana leží na nějaké (orientované) cestě z p do q.

3. (9.21) Kriticky $(k+1)$-barevný graf je hranově alespoň k-souvislý.

4. (11.37) (Popis toho, jak fungují náhodné procházky po grafech – viz dříve.)

Označme $\nu_t(x)$ počet výskytů x mezi vrcholy náhodné procházky $v_0, v_1, \dots, v_{t-1}$ (po souvislém grafu). Ukažte, že

(a) $\lim_{t\to\infty} E[\nu_t(x)/t] = \frac{\deg(x)}{2m}$

(b) $\lim_{t\to\infty} Var[\nu_t(x)/t] = 0$.

5. (14.25) Buď $(a_1, \dots, a_{k^2+1})$ libovolná posloupnost reálných čísel. Ukažte, že obsahuje monotónní podposloupnost délky $k+1$.

6. Uvažme rozklad vrcholů grafu na disjunktní podmnožiny $V(G) = V_1 \cup \cdots \cup V_k$, přičemž $k \geq 2$ a každá z množin V_i indukuje souvislý graf. Dokažte, že existují $i \neq j$ tak, že $G - V_i$ i $G - V_j$ jsou souvislé.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`