Kombinatorické etudy 6 – ZS 2011/2012

1. (4.2) Ukažte, že počet stromů s vrcholy $\{1, \ldots, n\}$ je n^{n-2}.

2. (6.31) Ukažte, že vlastnost "hrany e, f leží na společné kružnici nebo $e = f$" je ekvivalence.

3. (9.19 – z minula zbývá jeden směr části (b) – zkuste nápovědu)

(b) Graf G je podgraf (nebo indukovaný podgraf) nějakého kriticky $(k+1)$-barevného grafu právě tehdy, když pro každou hranu e platí $\chi(G/e) \leq k$.

(a něco nového: 9.20)

Když rozdělíme vrchol kriticky $(k+1)$-barevného grafu na několik vrcholů, je výsledný graf buď k-barevný nebo kriticky $(k+1)$-barevný. Dokažte. Pro které hodnoty k může nastat druhá varianta?

Rozdělením vrcholu v v grafu G rozumíme smazání vrcholu v, přidání nových vrcholů $v_1, \ldots, v_t$ a přidání hran: pro každou hranu uv v grafu G přidáme právě jednu hranu uv_i.

4. (11.37) (Popis toho, jak fungují náhodné procházky po grafech – viz dříve.)

Označme $\nu_t(x)$ počet výskytů x mezi vrcholy náhodné procházky $v_0, v_1, \ldots, v_{t-1}$. Ukažte, že (a) $\lim_{t\to\infty} E[\nu_t(x)/t] = \frac{\deg(x)}{2m}$ (b) $\lim_{t\to\infty} Var[\nu_t(x)/t] = 0$.

5. (14.10) Rozhodněte, zda pro každé k existuje n přirozené tak, že kdykoli obarvíme body $\mathbb{R}^n$ pomocí k barev, tak v jedné barvě najdeme kopii (geometricky shodnou) R, přičemž R je (a) obdélník, (b) obecný rovnoběžník.

6. Buď $(d_i)_{i=1}^n$ skóre (tj. posloupnost stupňů) rovinného grafu G.

(a) Pomocí odhadu pro $\sum_i d_i$ ukažte, že je-li $\delta(G)$ (minimální stupeň v G) alespoň 4, tak
$$\sum_i d_i^2 < 2(n+3)^2 - 62\,.$$

(b) Ukažte indukcí podle $n \geq 4$, že
$$\sum_i d_i^2 \leq 2(n+3)^2 - 62\,.$$

Ukažte, že rovnost může platit pro každé $n \geq 4$.

Minule jsme si ukázali, že si stačí rozmyslet pro rovinný graf a v něm vrchol v se sousedy $v_1, \ldots, v_s$, jak velký nejvýše může být součet $\sum_{i=1}^s \deg(v_k)$.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`