Kombinatorické etudy 6 – LS 2011/2012

1. (4.6 – zbývá odvodit rekurentní formuli) Označme T_n počet stromů s vrcholy $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dokažte, že platí

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-2}{k-1} T_k T_{n-k} \, .$$

Odvoďte odsud Cayleyho formuli ($T_n = n^{n-2}$).

(1.44 – hodí se k tomu odvození – první část už máme)

Dokažte tzv. Abelovy identity

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x+k)^{k-1}(y+n-k)^{n-k} = (x+y+n)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x+k)^{k-1}(y+n-k)^{n-k-1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x+y+n)^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1}(n-k)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2}$$

2. Buď G hranově k-souvislý graf, přičemž k je liché. Dokažte, že existuje strom T a zobrazení $f : V(G) \to V(T)$ tak, že dvojice (T, f) popisuje všechny hranové k-řezy v grafu G následujícím způsobem.

Pro hranu e v T označíme V_1, V_2 množiny vrcholů komponent $T - e$, a označíme $C(e)$ množinu hran G mezi $f^{-1}(V_1)$ a $f^{-1}(V_2)$. Pak platí

- pro všechny e je $|C(e)| = k$ (každé $C(e)$ je k-řez) a
- dostaneme takto všechny k-řezy.

3. (10.15)

- Zkonstruujte $(p+1)$-regulární graf s $2(p^2+p+1)$ vrcholy a obvodem 6 (p je prvočíslo).
- Zkonstruujte $(p+1)$-regulární graf s $2(p^3+p^2+p+1)$ vrcholy a obvodem 8 (p je zase prvočíslo). (Srovnejte též s příkladem z Komb. etud 2.)

4. (11.42) Označme $a(u,v)$ střední dobu, za kterou náhodná procházka z u dojde do v.

- * Dokažte, že pro každé tři vrcholy u, v, w platí

$$a(u,v) + a(v,w) + a(w,u) = a(u,w) + a(w,v) + a(v,u)$$

- Ukažte, že vrcholy grafu mohou být lineárně uspořádány tak, že když u předchází v, tak $a(u,v) \le a(v,u)$.

5. (14.11) Rozdělíme čísla $1, 2, \ldots, n$ na k skupin. Ukažte, že když je $n \ge k!e$, tak jedna ze skupin obsahuje čísla x, y, z, pro která platí $x + y = z$.

6. (12.13) Automorfismus grafu G je bijekce $f : V(G) \to V(G)$, která zachovává hrany. Grupu automorfismů nazveme transitivní, pokud pro každé vrcholy u, v existuje automorfismus f, pro který $f(u) = v$.

- Když je grupa automorfismů grafu G komutativní a transitivní, tak je isomorfní nějakému součinu $\mathbb{Z}_2^k$.
- Pro každé k sestrojte (multi)graf, jehož grupa automorfismů je transitivní a isomorfní $\mathbb{Z}_2^k$.
- Pro dost velká n sestavte takový graf bez násobných hran a smyček.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`