Kombinatorické etudy 3 – LS 2011/2012

1. (4.6 – z minula zbývá odvodit z rekurze explicitní vzorec) Označme T_n počet stromů s vrcholy $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dokažte, že platí

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-2}{k-1} T_k T_{n-k} \,.$$

Odvoďte odsud Cayleyho formuli ($T_n = n^{n-2}$).

2. Buď G hranově k-souvislý graf, přičemž k je liché. Buďte $X, Y \subseteq V(G)$, přičemž $\delta(X) = \delta(Y) = k$. Ukažte, že jeden ze čtyř atomů Vennova diagramu pro X a Y (tj. jedna z množin $X \cap Y$, $X - Y$, $Y - X$, $V(G) - X - Y$) je prázdný. Stručně: minimální liché řezy se nekříží.

3. (10.12) Buď $r \geq 2$ a $g \geq 2$. Pak existuje r-regulární graf s obvodem g.

4. (11.40) (a) Ukažte (na příkladu), že střední čas na přejití z u do v může být jiný, než na přejití z v do u, dokonce i v regulárním grafu.

(b) Pokud vrcholy u a v mají stejné stupně, je pravděpodobnost, že náhodná procházka z u navštíví v před návratem do u stejná, jako pravděpodbnost, že cestou z v navštívíme u před návratem do v. Co lze říci, pokud stupně nejsou stejné?

5. (14.29) V rovině je dáno $N = k^n + 1$ bodů. Ukažte, že můžeme nalézt "skoro rovnou" lomenou čáru s k úsečkami, tj. body $a_0, a_1, \ldots, a_k$ takové, že každý úhel $a_{i-1}a_ia_{i+1}$ má velikost alespoň $(1 - \frac{1}{n})\pi$.

6. Každá z $n \geq 4$ drben zná jeden drb, který nikdo jiný nezná. Mluví spolu jen po telefonu a při každém hovoru si navzájem sdělí všechny drby, které znají. Ukažte, že je potřeba alespoň $2n - 4$ hovorů, než všechny vědí všechno.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`