MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
UNIVERZITY KARLOVY V PRAZE

STRUČNÉ POZNÁMKY Z MA4
LS 2011/2012

Proseminář z matematické analýzy

Zapisovatelé:
Zúčastnění posluchači

Přednášející:
Mgr. Robert ŠÁMAL, Ph.D.

Tento text se vztahuje k předmětu NMAI068 – *Proseminář z matematické analýzy* tak, jak jej v LS 2011/12 přednášel R. Šámal. Na zápisu se podílejí jednotliví studenti, viz údaj u jednotlivých poznámek. Upozornění na chyby, nepřesnosti atd. jsou vítány.

1 Úvod do ODR (1.3.2012) *Zapsali: Duc Trung Ha & David Pěgřímek*

1.1 Úvod, přehled.

♠ Obyčejné diferenciální rovnice

aneb co by měl každý správný „matfyzák" znát!

♡ Funkcionální analysa

aneb lze skloubit algebru s matematickou analysou?

♣ Teorie míry a Lebesgueův integrál

aneb jak matematicky popsat obsah a objem; jak rozsekat hrášek, aby z něho šlo postavit slunce, a jak to vše souvisí s níže uvedeným obrázkem?[1]

♢ Další témata dle zájmů studentů

aneb co se jinam nevešlo...

1.2 Obyčejné diferenciální rovnice: co jsou a proč jsou.

V této části se budeme zabývat *obyčejnými diferenciálními rovnicemi*[2] a metodami používanými k jejich vyřešení.

Definice 1.1. *Značení $f\overbrace{'\cdots'}^{n}(x)$, někdy též $f^{(n)}(x)$, $f\overbrace{'\cdots'}^{n}$ či jen $f^{(n)}$, bude přirozeně značit n-tou derivaci funkce f podle x. Přesná induktivní definice jest*

$$f^{(n)}(x) := \begin{cases} f(x) & \textit{iff } n = 0 \\ [f^{(n-1)}(x)]' & \textit{iff } n \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

1.2.1 Motivační příklad

Příklad. *Najděte funkci $y(x)$ (tj. funkci y v proměnné x) takovou, že*

$$y' + 2xy = 0$$

Řešení. *Jako „správní matfyzáci" si výsledek tipneme*[3] *a uvidíme, jestli odpovídá zadání:*

$$y(x) = c \cdot e^{-x^2},$$

pro $x \in \mathbb{R}$ a konstantní parametr $c \in \mathbb{R}$.

Pro kontrolu dosadíme:

$$y'(x) + 2xy = (c \cdot e^{-x^2})' + 2xy = c \cdot e^{-x^2}(-2x) + 2x(c \cdot e^{-x^2}) = 0.$$

Tipli jsme si tedy správně. Ale jsou to skutečně všechna možná řešení?

---

[1] Na obrázku je znázorněn „Banachův-Tarskiho paradox".

[2] zkráceně *ODR*

[3] Ve skutečnosti jsme k němu došli výpočtem, ale zatím nepředbíhejme.

1.2.2 Aplikace ODR

1. **volný pád**
   Budeme zkoumat pohyb padajícího míčku v různých prostředích a v různém směru letu.
   (a) **Varianta „vakuum“**

   Příklad 1.2. *Upustíme míček ve vakuu (tedy zanedbáváme tření a jiné nepříjemnosti).*

   Buď $y(t)$ funkce hloubky (vzhledem k počáteční výšce) v závislosti na čase. Slavný Druhý Newtonův pohybový zákon tvrdí, že

   $$\mathbf{F} = \mathrm{m} \cdot \mathbf{a},$$

   kde $\mathbf{F}$ a m jsou (z pohledu matematika) nezajímavé konstanty. Ovšem zrychlení $\mathbf{a}$ lze vyjádřit jako

   $$\mathbf{a} = -y''$$ [4]

   Protože $\mathbf{F}$ a m jsou konstantní, snadno nahlédneme

   $$y'' = c, \text{pro } c > 0.$$

   Těmto rovnicím se říká *ODR 2. řádu*, neb se v nich vyskytuje 2. derivace jako nejvyšší ze všech derivací.

   (b) **Varianta „ve vzduchu“**

   Příklad 1.3. *Upustíme míček tentokrát ve vzduchu (tedy tření a jiné nepříjemnosti už nám tolik nevadí, proto s nimi i počítáme).*

   Lze přijít na to (experimentálně či vlastní vírou), že odpor vzduchu je přímo úměrný čtverci rychlosti, v matematické notaci

   $$\uparrow \text{odpor} \sim \uparrow (y')^2.$$

   Ten očividně v lineárně míře snižuje zrychlení pádu, konkrétně

   $$y'' = c - k \cdot (y')^2,$$

   kde $c > 0$ je konstanta z předchozí varianty úlohy a $k > 0$ je nějaká nová konstanta (míry vlivu odporu vzduchu na pád).

[4] Znaménko „−“ je pro správný směr vektoru zrychlení.

(c) **Varianta „z dálky"**

Příklad 1.4. *Nyní upustíme míček z velké dálky, lépe řečeno z „vysoké výšky" (jakoby z kosmu).*

Buď $y(t)$ funkce vzdálenosti míčku od středu Země[5] v závislosti na čase. Snadno se nahlédne (ale důkaz přenechme fysikům), že

$$y'' = \frac{c}{y^2}.$$

2. **vývoj populace**
Buď $y(t)$ funkce počtu jedinců (bakterií, králíků, uživatelů Facebooku...) v čase t. Můžeme pak vývoj takové populace modelovat několika způsoby, např. jednoduchou *ODR 1. řádu*[6]

$$y' = c \cdot y$$

či „propracovanější" *ODR 1. řádu* beroucí i v potaz omezení shora (velikost Petriho misky, rozloha pastviny, kapacita Internetu...)

$$y' = c \cdot (K - y),$$

kde K bude representovat tento horní strop pro kardinalitu populace.

3. **vedení tepla**
Buď $u(x,t)$ funkce teploty v čase t a v bodě x (pro jednoduchost uvažujme 1-rozměrný případ – i tak to bude složité ažaž). Vedení tepla lze modelovat „parciální diferenciální rovnicí" (obsahující parciální derivace)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Uvědomíme-li si, co je to z fysikálního hlediska „tok tepla", okamžitě nás napadne závislost

$$\uparrow \text{tok} \sim \uparrow \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Nakonec nahlédneme, jak souvisí změna energie v daném bodě s tokem tepla, a dosadíme takto:

$$\uparrow \Delta\text{Energie} \sim \uparrow \frac{\partial}{\partial x}\text{toku} \sim \uparrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Poznámka: Dosti podobným jevem ze světa finančnictví a cenných papírů je takzvaná „Blackova-Scholesova rovnice" modelující hodnotu opcí evropského typu.

1.3 Řešení základních typů.

Příklad 1.5. *Vyřešte ODR 2. řádu*

$$y''(t) = c$$

pro nějakou pevně danou konstantu $c \in \mathbb{R}$.

[5] jakožto planety Země s velkým počátečním písmenem v názvu
[6] diferenciální rovnicí s 1. derivací jakožto nejvyšší

Tuto úlohu snadno vyřeší i student 1. ročníku Informatiky na MFF UK. Nejde totiž o nic „světoborného“, pouze se dvakrát nalezne primitivní funkce:

$$y'(t) = c \cdot t + d$$
$$y(t) = \frac{c \cdot t^2}{2} + d \cdot t + e$$

Tento příklad je spíše ilustrativní. Znázorňuje 1 z možných cílů, kterých chceme při řešení ODR dosáhnout – rovnici přímo vyřešit.

Na zcela opačném konci spektra obtížnosti leží 1 ze 7 *miléniových problémů*, tzv. „Navierovy-Stokesovy rovnice“ (konkrétně rozhodnout, zda-li jsou vždy řešitelné).

Řešení tohoto otevřeného problému je asi stejně triviální jako rozřešit problém „P vs. NP“ či dokázat „Riemannovu hypotesu“ – tedy úloha pro studenta Bc. studia na MFF UK těžká více než dost.[7]

Tyto rovnice jsou na druhou stranu ukázkou jiného cíle při řešení diferenciálních rovnic, tedy spíše analysovat vlastnosti (neboť úplné vyřešení by bylo příliš obtížné).

Definice. *ODR (1. řádu) je rovnice tvaru „$y' = f(x,y)$“ pro $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Přesněji se snažíme pro nějaký interval $J \subseteq \mathbb{R}$ nalézt funkci $y(x) : J \to \mathbb{R}$ takovou, že $y'(x) = f(x, y(x))$ při $(x, y(x)) \in D$.*

Na obrázku to lze nahlédnout tak, že na oblasti D máme zadané tzv. „směrové pole“ (znázorňující požadované náklony případných tečen v daných bodech). Snažíme se jím „protáhnout“ nějakou funkci, tak aby tečny v každém bodě respektovaly zadání směrového pole.

Poznámka: Toto byl tzv. „explicitní zápis“ ODR. „Implicitním zápisem“ ODR (obecně n-tého řádu) je míněna rovnice $F(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0$.

1. typ: $y' = f(x)$ (primitivní funkce)

V každé x-ové souřadnici je funkcí $f(x)$ pevně zadána žádaná směrnice[8] funkce $y(x)$. To je znázorněno na následujícím obrázku:

Tento typ známe již z MA2, jedná se o tzv. „primitivní funkce“. Ty jsou jednoznačně dány *až* na konstantu:

$$y(x) = \int f(x) + C$$

pro $C \in \mathbb{R}$.

Při řešení ODR máme však často zadány i počáteční podmínky (původní počet bakterií, králíků, uživatelů Facebooku...) a to ve tvaru $y(x_0) = y_0$. To nám pomůže pro určení jednoznačné primitivní funkce **včetně** konstanty:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)$$

Všimněme si, že můžeme provést „pseudokontrolu“ korektnosti při dosazení krajní hodnoty $x := x_0$ a že povede ke správné počáteční podmínce.

2. typ: $y' = g(y)$ (jistě ne primitivní funkce)

[7] Ovšem ne úplně nemožné, jak lze vidět z příkladu dnes již vyřešené „Poincarého domněnky“.
[8] tangens úhlu naklonění tečny v příslušném bodě

Uvědomme si, že jde o velice podobnou úlohu jako předtím – v každé tentokrát y-ové souřadnici je funkcí $g(y)$ pevně zadána žádaná směrnice pro funkci $y(x)$. Obrázkově:

Pro $g(y) \equiv 0$ je situace velice jednoduchá. Rovnice se zjednoduší na $y'(x) = 0$, tedy funkce má lokální minimum i maximum v každém bodě, neboli lidsky řečeno je *konstantní*.

Pro $g(y) \not\equiv 0$ si ukážeme (mnemotechnický) postup řešení, jaký používají engineeři a economové. Rozepíšeme funkci y' jako

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(y).$$

Protože $g(y) \not\equiv 0$, můžeme prohodit pravou stranu a jmenovatel

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \mathrm{d}x$$

a přirozeně nás napadne zintegrovat obě strany

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int \mathrm{d}x.$$

Označíme-li primitivní funkci z levé strany jako $H(y)$,[9] získáme finální tvar

$$H(y) = x + C,$$

pro $C \in \mathbb{R}$. To vypadá poněkud typově špatně, ale rovnice ve skutečnosti obsahuje pouze funkce v proměnné x takto

$$H(y(x)) = x + C.$$

Příklad 1.6.

$$\begin{aligned} y' &= -2y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -2y \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{-2y} &= \int \mathrm{d}x \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{-2y} &= x + C \\ \ln|y| &= -2x - 2C \\ y &= \pm e^{-2x+k} \\ y &= A \cdot e^{-2x}, \end{aligned}$$

kde $k \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jsou nějaké nezajímavé konstanty. Tudíž $y = A \cdot e^{-2x}$ pro $A \in \mathbb{R}$ jsou řešení této ODR. Vyvstává přirozená otázka: „Jsou všechna?“ – Ano.

Důkaz. (nástin důkazu) Nahlédneme, že

$$(y(x) \cdot e^{2x})' = \underbrace{y'}_{=-2y} \cdot e^{2x} + y \cdot 2 \cdot e^{2x} = 0,$$

neboli $y(x) \cdot e^{2x}$ musí být nutně konstantní (pro $y(x)$ splňující danou ODR). Ta v našem případě odpovídá výše uvedené konstantě A. □

[9] Pozor, nepleťte si s funkcí entropie!

Nyní se vrátíme zpátky do kůží „matfyzáků“ a ukážeme si (aspoň náznakem), proč tato metoda vůbec může fungovat.

Důkaz. (nástin důkazu) Hledáme $y = \varphi(x) <::::::> x = \varphi^{-1}(y)$. Aplikací věty *o derivaci inversní funkce* z MA1 dostaneme

$$x' = [\varphi^{-1}(y)]' = \frac{1}{\varphi'(x)} = \frac{1}{g(y)},$$

kde druhá rovnost je zmiňovaná derivace inversní funkce a poslední rovnost jsme získali ze zadání ODR. Tedy můžeme nyní korektně zintegrovat obě strany. □

Ukázka (ne)jednoznačnosti.

Příklad 1.7.

$$y' = \sqrt{|y|}$$

BÚNO $y > 0$.

$$2\sqrt{y} = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \int \mathrm{d}x = x + C$$

$$y = \frac{(x+c)^2}{4}$$

Pokračování příště...