Zápočtová písemka z matematické analýzy NMAI055 – 10.1.2012

Na každý papír napište svoje jméno. Výrazně označte a oddělte jednotlivé příklady.
Za každý příklad můžete získat 5 bodů, pro úspěšné napsání je potřeba získat alespoň 13 bodů.

1. příklad Spočítejte objem oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, která je ohraničena plochami $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$ a $x + y + z = 4$.

2. příklad Zjistěte, zda následující funkce má komplexní derivaci (a pokud ano, tak ji spočtěte).

$$f(z) = \mathrm{Re}(z) + 2i\,\mathrm{Im}(z)$$

(Tj. např. $f(1 + i) = 1 + 2i$.)

3. příklad S využitím Cauchyovy věty spočtěte

$$\int_\varphi \frac{1}{z(1+z)^2}\,\mathrm{d}z\,,$$

pokud φ je kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ a středu (a) -1, (b) 0, (c) 1.

4. příklad Zjistěte, zda následující posloupnost funkcí konverguje bodově, stejnoměrně, příp. lokálně stejnoměrně:

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,.$$

5. příklad Nalezněte Fourierovu řadu pro x^3. (Přesněji: pro 2π-periodickou funkci f, definovanou předpisem $f(x) = x^3$ pro $x \in (-\pi, \pi]$.)
Rozhodněte, ve kterých bodech nalezená Fourierova řada konverguje a k čemu.