1. cvičení z MA3 – 4.10.2011

Vícerozměrné integrály – Fubiniho věta

Mějme 'hyperkvádr' $I \subseteq \mathbb{R}^n$ – kartézský součin n uzavřených intervalů (dále budeme říkat jen kvádr). Riemannův integrál $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ funkce $f : I \to \mathbb{R}$ zavedeme na přednášce podobně, jako Riemannův integrál funkce na uzavřeném intervalu – pomocí dělení na podkvádry. Podle **Fubiniho věty** lze tento integrál počítat 'postupně po složkách'. Pokud je J další kvádr, pak platí

$$\int_{I\times J} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_I \left(\int_J f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_J \left(\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$$

ale ne vždy – je třeba předpokládat, že první z integrálů existuje (tj. horní a dolní integrál rovnají). Naopak lze tedy $\int_I f$ převést na n-násobný integrál reálné funkce reálné proměnné.
Obecnější verze **Fubiniho věty** hovoří o funkcích, které nejsou definovány na kvádru. Buď $E \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Označme $\pi_1 E$ *projekci* E na prvních m souřadnic, $\pi_2 E$ projekci na druhých n souřadnic. Dále označme $E^{x,\cdot}$ *řez* množinou E v bodě $x \in \mathbb{R}^m$, tj.

$$E^{x,\cdot} = \{y \in \mathbb{R}^n : (x,y) \in E\}$$

a obdobně $E^{\cdot,y}$.
Buď nyní $f : E \to \mathbb{R}$, kde hranice množiny E (značíme ∂E) je nulová množina. Pokud $\int_E f$ existuje, pak existují všechny následující integrály a rovnají se:

$$\int_E f = \int_{\pi_1(E)} \int_{E^{x,\cdot}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\pi_2(E)} \int_{E^{\cdot,y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Pro zjištění, zda nějaký integrál existuje, se hodí **Lebesgueova věta**: Pro **omezenou** reálnou funkci $f : I \to \mathbb{R}$ (kde I je kvádr)

Riemannův integrál $\int_I f$ existuje právě tehdy, když **množina bodů nespojitosti je *nulová*.**
Konečně množina A je nulová, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ lze A pokrýt kvádry (popřípadě nekonečně mnoha), o celkovém objemu $< \varepsilon$.

1. Integrujte pomocí Fubiniho věty, zatím bez ověřování předpokladů:
(a) $\int_\omega e^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\omega = [0,1] \times [0,1]$
(b) $\int_\omega xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\omega = [0,1] \times [0,1]$
(c) $\int_\omega f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\omega = [a,b] \times [c,d]$
(d) $\int_\omega \frac{y}{x+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\omega = [0,1] \times [1,3]$
(e) $\int_\omega (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je ohraničená přímkami $y = x$, $y = 0$ a $x + y = 2$.
(f) $\int_\omega \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\omega = \{[x,y] : x \le 2, y \le x \le 2y\}$
(g) $\int_\omega xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\omega = \{[x,y] : x^2 + y^2 - 1 \le 0, \quad x + y - 1 \ge 0\}$ (zkuste obě pořadí integrace).

2. Pozor, předpoklady jsou důležité: Označme f funkci z $[0,1]^2$ do $\mathbb{R}$ danou vztahem $f(x,y) = -1/x^2$ pro $x > y$, $f(x,y) = 1/y^2$ pro $x < y$ a $f(x,y) = 0$ pro $x = y$. Spočtěte
(a) $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
(b) $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

3. Změňte pořadí integrace
(a) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x$
(b) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{2x}^{3x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$
(c) $\int_{-3}^0 \mathrm{d}x \int_{-x}^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_0^3 \mathrm{d}x \int_x^3 f(x,y)\,\mathrm{d}y$

4. Spočtěte obsah oblasti $\omega \subseteq \mathbb{R}^2$ – tj. integrál $\int_\omega 1$, kde ω je ohraničena křivkami:
(a) $y = x^2$, $y = 2 - x$

(b) $y = x^2$, $x = y^2$
(c) $y = 4/x$, $y = x$, $x = 3$
(d) obecně: $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$

5. Spočítejte objem oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, která je ohraničena plochami
(a) $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$
(b) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$
(c) $z = 0$, $x + y + z = 2$, $y = x^2$
(d) $z = 0$, $x + y + z = 2$, $y = x^2$ a $y = 0$
(e) $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $y = 2x - x^2$, $z = 2xy$

6.
(a) Spočtěte těžiště trojúhelníku, neboli $\frac{1}{S}\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ pro $f(x,y) = x$ a pro $f(x,y) = y$, kde Ω je konvexní obal bodů $(1,0)$, $(0,2)$ a $(0,0)$ a $S = \int_\Omega 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
(b) Spočtěte těžiště čtyřstěnu, neboli $\frac{1}{V}\int_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ pro $f(x,y,z) = x$, $f(x,y,z) = y$ a pro $f(x,y,z) = z$ kde Ω je konvexní obal bodů $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$ a $(0,0,0)$ a $V = \int_\Omega 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.