Kombinatorické etudy 9 – LS 2010/2011

1. (2.24) Otočme uspořádanou množinu vzhůru nohama: tj. místo $(V, \leq)$ uvážíme $(V, \leq^*)$ kde $x \leq^* y$ právě když $y \leq x$. Buď μ Möbiova funkce pro $(V, \leq)$ a μ^* pro $(V, \leq^*)$. Ukažte, že $\mu^*(x, y) = \mu(y, x)$.

2. (5.18) (a) V grafu G označme $m_i(G)$ počet jeho párování s i hranami. Vyjádřete $m_1(G), m_2(G), \dots$ pomocí $n = |V(G)|$ a $m_1(\bar{G}), m_2(\bar{G}), \dots$. ($\bar{G}$ je doplněk G)

(b) Pokud $|V(G)|$ je sudé a $\bar{G}$ má lichý počet párování, tak G má perfektní párování.

(c) G má sudý počet perfektních párování právě tehdy, když existuje neprázdná množina $S \subseteq V(G)$ taková, že každý vrchol G má sudý počet sousedů v S.

3. (9.9) Pokud digraf G nemá orientovanou cestu délky m, tak $\chi(G) \leq m$.

4. (11.10 – poslední šance) Buďte G, H dva grafy s vrcholy $\{\varepsilon^i : i = 0, \dots, p-1$, kde $\varepsilon = e^{2\pi i/p}$, p prvočíslo. Nechť G i H jsou invariantní vůči rotaci o $2\pi/p$. Pokud G a H jsou isomorfní, tak existuje přirozené t, pro něž umocnění na t-tou je isomorfismus $G \to H$.

5. (12.6 – poslední šance) * Opět máme grupu Γ s n prvky, tentokrát $n \geq 6$. Najděte graf G s $2n$ vrcholy, že $Aut(G) \cong \Gamma$.

6. (15.9) Buďte G_1, G_2 dva 3-souvislé grafy a $\varphi : E(G_1) \to E(G_2)$ bijekce na hranách taková, že hrany tvořící kružnici v G_1 se zobrazí na hrany nějaké kružnice v G_2 a naopak.

(a) Ukažte, že φ zachovává sousednost hran.

(b) Ukažte, že G_1 a G_2 jsou isomorfní. (Neboli: 3-souvislé grafy lze zrekonstruovatz jejich matroidu.)