Kombinatorické etudy 5 – LS 2010/2011

1. (2.21 – zbylo z minula) Buď $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ množina s částečným uspořádáním $\leq$. Matici A nazveme kompatibilní, pokud

$$A_{i,j} \neq 0 \Rightarrow x_i \leq x_j \, .$$

Ukažte, že součet, součin a (existuje-li) inverze z kompatibilních matic je kompatibilní. — Zbývá už jen inverze.

2. (5.12) Bloudíme v bludišti (neorientovaný graf), začínáme ve vrcholu x_0. Dodržujeme přitom tato pravidla:

- Nikdy nepoužijeme tutéž hranu dvakrát ve stejném směru.
- Při první návštěvě vrcholu $x \neq x_0$ si označíme hranu, kterou jsme přišli. Tuto hranu použijeme k odchodu z x až když nebudeme mít jinou možnost, tj. všechny ostatní hrany z x jsme už směrem z x prošli.

Ukažte, že se zasekneme v x_0 a to až v momentě, kdy jsme prošli každou hranu v obou směrech.

3. (9.7) Kategoriální součin grafů je definován následovně: $V(G_1 \times V_2) = V(G_1) \times V(G_2)$, $E(G_1 \times V_2) = \{\{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\} : u_1 v_1 \in E(G_1), u_2 v_2 \in E(G_2)\}$. (Doporučuji obrázek.)

- $\chi(G_1 \times G_2) \leq \min\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$
- $\chi(G \times G) = \chi(G)$
- $\chi(G \times K_n) = \min\{\chi(G), n\}$
- * Ukažte, že pokud G je souvislý a $\chi(G) > n$, tak $G \times K_n$ má jednoznačné n-obarvení (až na permutaci barev).
- Kolik n-obarvení může graf mít?

4. (11.8 – zbylo z minula) Buď G graf, jehož grupa automorfismů obsahuje regulární komutativní podgrupu Γ. (Regulární znamená, že pro každé $u, v \in V(G)$ existuje *právě jedno* $\gamma \in \Gamma$, že $\gamma(u) = v$, označme ho $\gamma_{u,v}$. Speciálně tedy G je tranzitivní.) Buď χ *charakter grupy* Γ (neboli homomorfismus do komplexních čísel s násobením). Buď v_0 jeden z vrcholů G. Ukažte, že

$$\sum_{v : v_0 v \in E(G)} \chi(\gamma_{v_0, v})$$

je vlastní číslo G.

5. (12.4) Buď $\Gamma = \{g_1, \dots, g_n\}$ grupa. Definujme barevný digraf G tak, že z g_i do g_j povede hrana barvy k právě když $g_i g_j^{-1} = g_k$. Jaká je grupa automorfismů vzniklého barevného digrafu? (Automorfismy musejí zachovávat orientaci i barvy.)

6. (15.3 – zbylo z minula) Nechť $0 \leq i < r$. Vytvořme graf $L_i(K_n^r)$ jehož vrcholy jsou r-tice z n prvků (čili hyperhrany hypergrafu K_n^r), a dvě r-tice A, B sousedí, právě když $|A \cap B| = i$. Ukažte, že pro dostatečně velké n je každý automorfismus $L_i(K_n^r)$ určen permutací $V(K_n^r)$.