

Kombinatorické etudy 2 – LS 2010/2011

1. (3.26) (Pólya-Redfield – zůstává z minula) Bud' Γ permutační grupa působící na množině D a R bud' jiná množina. Řekneme, že zobrazení $f, g : D \rightarrow R$ jsou *podstatně odlišné*, pokud neexistuje $\pi \in \Gamma$ pro něž by platilo $g = f \circ \pi$. Jaký je počet podstatně odlišných zobrazení z D do R ?

U grupy Γ známe její *cyklický index* F , což je polynom

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\pi \in \Gamma} x_1^{c_1(\pi)} \dots x_n^{c_n(\pi)}$$

($c_i(\pi)$ je počet i -cyklů permutace π).

2. (5.5) Digraf G nazveme *hezký*, pokud jeho vrcholy lze obarvit dvěma barvami tak, že z každého vrcholu vede hrana do nějakého vrcholu opačné barvy. Ukažte, že silně souvislý digraf je hezký, právě když obsahuje sudý cyklus.

3. (9.4) Předpokládejme, že graf G má dobré obarvení, ve kterém se každá barva vyskytuje alespoň dvakrát. Ukažte, že G má takové obarvení pomocí $\chi(G)$ barev.

4. (11.6 – zůstává z minula) Nalezněte nekonečně mnoho dvojic neisomorfních stromů se stejným spektrem.

5. (12.2) Ukažte, že

(a) grupa automorfismů pravidelného dvanáctistěnu je $A_5 \times \mathbb{Z}_2$.

(b) grupa automorfismů krychle je $S_4 \times \mathbb{Z}_2$.

Jak je to pro ostatní Platónská tělesa?

6. (15.2) (a) Bud' α automorfismus $L(K_n^r)$ (přičemž K_n^r je hypergraf s n vrcholy, kde hrany jsou všechny r -tice, $n \geq 3r$). Pak α je indukováno automorfismem K_n^r , tj. permutací $V(K_n^r)$.

(b) Předchozí výsledek platí pro $2r < n \leq 3r$, ale neplatí pro $n \leq 2r$.