# Kombinatorické etudy 1 – LS 2010/2011

**1.** (3.26) (Pólya-Redfield) Buď $\Gamma$ permutační grupa působící na množině $D$ a $R$ buď jiná množina. Řekneme, že zobrazení $f, g : D \to R$ jsou *podstatně odlišné*, pokud neexistuje $\pi \in \Gamma$ pro něž by platilo $g = f \circ \pi$. Jaký je počet podstatně odlišných zobrazení z $D$ do $R$?

U grupy $\Gamma$ známe její *cyklický index* $F$, což je polynom

$$F(x1, \ldots, x_n) = \sum_{\pi \in \Gamma} x_1^{c_1(\pi)} \ldots x_n^{c_n(\pi)}$$

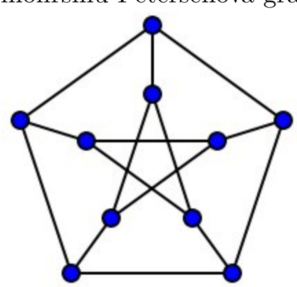
($c_i(\pi)$ je počet $i$-cyklů permutace $\pi$).

**2.** (5.4) Každé hraně orientovaného grafu $G$ přiřadíme hodnotu $v(e)$ – můžeme si ji představit jako práci potřebnou k přesunu proti směru hrany $e$. Chceme najít 'potenciál' – funkci $p(x)$ definovanou pro $x \in V(G)$ takovou, že kdykoli je $e = (x, y)$ tak $v(e) = p(y) - p(x)$. Charakterizujte grafy, kde je to možné.

**3.** (9.3) Dokažte, že $\chi(G_1 \cup G_2) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$.

**4.** (11.6) Nalezněte nekonečně mnoho dvojic neisomorfních stromů se stejným spektrem.

**5.** (12.1) Jaká je grupa automofirsmů Petersenova grafu?



**6.** (15.1) (a) Buďte $G_1$, $G_2$ grafy (bez smyček a násobných hran), se všemi stupni $\geq 4$. Pokud $L(G_1) \cong L(G_2)$ pak i $G_1 \cong G_2$.

(b) Když vynecháme omezení na stupně, předchozí tvrzení neplatí. Nalezněte souvislé protipříklady.

(c) Buďte $G_1, G_2$ souvislé grafy a $\varphi : L(G_1) \to L(G_2)$ isomorfismus mezi $L(G_1)$ a $L(G_2)$. Řekneme, že $\varphi$ je triviální, pokud existuje isomorfismus $\psi : G_1 \to G_2$ takový, že $\psi$ indukuje $\varphi$ na hranách. Pro které grafy existují netriviální isomorfismy mezi jejich hranovými grafy?