Kombinatorické etudy 4 – ZS 2010/2011

1. (3.22) (ponecháno z minula – ještě naposled – na webu je rozšířená nápověda) cast Buďte $x_1, \ldots, x_n$ reálná čísla. Pro každou permutaci π množiny $\{1, \ldots, n\}$ definujme

$$a(\pi) = \max\{0, x_{\pi(1)}, x_{\pi(1)} + x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(1)} + x_{\pi(2)} + \cdots + x_{\pi(n)}\}\,.$$

Uvažme cykly $C_1, \ldots, C_k$ permutace π a položme

$$b(\pi) = \sum_{l=1}^{k} \max\bigl(0, \sum_{j \in C_l} x_j\bigr)$$

Ukažte, že $\{a(\varrho) \mid \varrho \in S_n\}$ a $\{b(\pi) \mid \pi \in S_n\}$ jsou stejné (jako multimnožiny).

2. (6.12) Turnaj je silně souvislý právě když obsahuje hamiltonovskou kružnici.

3. (7.10) Bipartitní graf G s minimálním stupněm r je sjednocením r disjunktních párování.

4. (11.2) (ponecháno z minula) Buď G regulární graf (všechny stupně jsou stejné), a A multimnožina jeho vlastních čísel (tzv. spektrum). Jaké je spektrum

(a) doplňku $\bar{G}$? (tohle už víme)

(b) hranového grafu $L(G)$?

(c) Jaké je spektrum Petersenova grafu?

5. (13.4) Nechť 3-uniformní hypergraf H (bez násobných hran) obsahuje $|V(H)| - 1$ hran. Dokažte, že obsahuje cyklus délky alespoň 3.

6. (14.3) – tohle jsme minule taky nestihli
Z minula nám chybí část (b). Dále si připomeňte/dokažte Ramseyovu větu:

(a) Buď K_n^r hypergraf tvořený všemi r-ticemi z n bodů. Nechť $a_1, \ldots, a_k \geq 1$. Ukažte, že existuje číslo N (nejmenší takové buď $R_n^r(a_1, \ldots, a_k)$), že kdykoli obarvíme hrany (tj. r-tice) hypergrafu K_N^r pomocí k barev, tak pro nějaké i najdeme $K_{a_i}^r$ jehož všechny hrany mají barvu i.

(b) Označme $R_k(a) = R_k(a, \ldots, a)$. Dokažte, že

$$R_k^{r+1}(a) < k^{R_k^r(a)^r}\,.$$