# 5. cvičení z MA — 6.4.2011

## Určitý integrál

Určitý integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se definuje jako $F(b_-) - F(a_+)$, kde $F$ je primitivní funkce a značky $_-$, $_+$ značí limitu zleva, zprava. Zápis:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F]_a^b = F(b_-) - F(a_+) = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)\,.$$

**Per partes pro určitý integrál:** $\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$

**Substituce pro určitý integrál:** $\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$

$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x$

**1.**
(a) $\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,\mathrm{d}x$
(b) $\int_0^1 \cos^3 x \sin x\,\mathrm{d}x$
(c) $\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x$

## Aplikace integrálů

**Plocha pod křivkou** $y = f(x)$ (pro $x \in [a, b]$) má obsah $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Je-li křivka dána parametricky $y = \psi(t), x = \phi(t)$, pro $t \in [a, b]$ pak je plocha pod touto křivkou $\int_a^b \psi(t)\phi'(t)\,\mathrm{d}t$. Pro křivku danou v polárních souřadnicích $r = r(\phi)$, ($\phi \in [\alpha, \beta]$) je plocha 'mezi křivkou a středem souřadnic' rovna $\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2(\phi)\,\mathrm{d}\phi$.

**2.** Spočtěte obsah
(a) obdélníku,
(b) trojúhelníku,
(c) kruhu,
(d) elipsy,
(e) plochy pod sinusovkou na $[0, \pi]$.
(f) plochy sevřené křivkami $y = 1/x$, $y = 1/x^2$ a $x = 2$.

**3.** Spočtěte $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$ a $\int_0^{2\pi} (\sin x)^2\,\mathrm{d}x$. (Jaký význam mají tyto integrály ve fyzice, jmenovitě při zkoumání střídavého proudu? Pokud si nepamatujete jak se počítá se střídavým proudem, zeptejte se kamaráda fyzika :-)

**Délka křivky** $y = f(x)$ ($x \in [a, b]$) je $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$. Délka křivky dané parametricky $y = \psi(t), x = \phi(t)$, pro $t \in [a, b]$ je $\int_a^b \sqrt{\psi'^2(t) + \phi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$. Pro křivku danou v polárních souřadnicích $r = r(\phi)$, ($\phi \in [\alpha, \beta]$) je její délka $\int_\alpha^\beta \sqrt{r'^2(\phi) + r^2(\phi)}\,\mathrm{d}\phi$.

**4.** Určete
(a) obvod kružnice,
(b) délku křivky $x^{3/2}$ pro $x \in [0, a]$,
(c) délku křivky $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\log x$ pro $x \in [1, e]$

**Objem tělesa** vzniklého rotací křivky $y = f(x)$ ($x \in [a, b]$) kolem osy $x$ je $\int_a^b \pi f(x)^2 \,\mathrm{d}x$. (Pro parametricky danou křivku zkuste vzorec odvodit sami pomocí věty o substituci.)

**5.** Určete objem
(a) válce,
(b) kužele,
(c) koule,
(d) anuloidu,
(e) nekonečného "trychtýře" vzniklého rotací funkce $f(x) = 1/x$ pro $x \in [1, \infty)$ kolem osy $x$.
(f) vzniklé rotací funkce $y = \sqrt[3]{x}$ pro $y \in [1, 2]$ kolem osy $y$.
(g) * $n$-rozměrné koule

**Povrch tělesa** vzniklého rotací křivky $y = f(x)$ ($x \in [a, b]$) kolem osy $x$ je $\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$. (Pro parametricky danou křivku zkuste vzorec odvodit sami pomocí věty o substituci.)

**6.** Určete povrch
(a) válce,
(b) kužele,
(c) koule,
(d) paraboloidu (satelitní antény) vzniklé rotací křivky $y = c\sqrt{x}$ pro $x \in [0, b]$. (Reálné parametry by mohly být $b = 0.3m$, $c = 1.8m^{1/2}$.)
(e) anuloidu (duše od pneumatiky) vniklé rotací kružnice o poloměru $r$ kolem osy procházející rovinou kružnice a vzdálené $R$ od jejího středu. (Zkuste si spočíst pro duši z kola.)
(f) jednodílného hyperboloidu (chladící věž elektrárny) daného rovnicí $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$. (U Temelína je patní průměr 130.7m, průměr v koruně 82.6 m, výška 155 m. Dost jistě je $a = b$, $c$ už lze dopočítat.)
(g) nekonečného "trychtýře" vzniklého rotací funkce $f(x) = 1/x$ pro $x \in [1, \infty)$ kolem osy $x$.

## Odhady sum a řad a další

**7.** Zjistěte (pomocí integrálního kritéria), zda následující řady konvergují ($a$ je reálný parametr)
(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$,
(b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^a}$

**8.** Odhadněte (pomocí integrálu) velikost $n!$. (Tip: logaritmus je užitečný ...)

**9.** Spočtěte $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$. (Nepočítejte, ale podivte se: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.)

## Hezké útvary

**10.** *Cykloida* je křivka, která vznikne, když valíme kružnici (poloměru $r$) po přímce a sledujeme dráhu jednoho bodu (který je na začátku a na konci bodem dotyku kružnice a přímky).
(a) Ověřte, že cykloida má rovnice (pro $\alpha \in [0, 2\pi]$)

$$x(\alpha) = r\alpha - r\sin\alpha$$
$$y(\alpha) = r - r\cos\alpha$$

(b) Spočtěte její délku.
(c) Spočtěte plochu pod křivkou.

**11.** *Astroida* je křivka zadaná rovnicí $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Určete její délku.

**12.** *Kardioida – srdcovka* – je druh *epicykloidy* (křivky, kterou opíše bod na kružnici, která se valí okolo jiné kružnice). V tomto případě jsou obě kružnice stejně velké.

(a) V polárních souřadnicích je rovnice srdcovky $r(t) = a(1 - \sin t)$.
(b) Určete plochu uvnitř srdcovky.
(c) Určete její délku.
(d) Určete plochu vně srdcovky $r(t) = 1 + \sin t$ a zároveň uvnitř kruhu $r(t) = 3 \sin t$
(Pozn.: srdcovka se často vyskytuje v Mandelbrotově množině.)

**Guldinovo pravidlo pro objemy** Objem rotačního tělesa vzniklého rotací rovinné množiny $M$ kolem přímky $p$, neprotínající množinu $M$, je rovna součinu obsahu množiny $M$ a délky kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště množiny $M$ od $p$.

**Guldinovo pravidlo pro povrchy** Plocha rotační plochy vytvořené rotací rovinné křivky $\phi$ kolem přímky $p$ je rovna součinu délky křivky $\phi$ a obvodu kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště křivky $\phi$ od $p$.

**13.** Aplikujte na
(a) válec,
(b) anuloid,
(c) kužel,
(d) kouli.

**14.** Zamyslete se, proč to asi platí.