

1. cvičení z MA—23.2.2011

Aplikace průběhů funkcí

Jak se pomocí derivace pozná, kde má funkce maximum/minimum? Kde je rostoucí/klesající?

1.

- (a) Který z obdélníků o obvodu l má největší obsah?
- (b) Který z válců o objemu V má nejmenší povrch?
- (c) Z čtvercového listu papíru odstříhneme v rozích malé čtverce a složíme krabičku (bez víka). Jak velké čtverce máme odstříhnout, aby vzniklá krabička měla co největší objem?
- (d) Jak velký sněhulák (ze tří koulí) lze vyrobit z koule o poloměru 1 metr? Tip: použijte Jensenovu nerovnost. Pro konvexní funkci f a čísla α_i, x_i taková, že $\alpha_i \geq 0, \sum_i \alpha_i = 1$ platí, že

$$f\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) \leq \sum_i \alpha_i f(x_i).$$

(e) Z chodby o šířce A odbočuje chodba o šířce B . S jak dlouhou tyčí je možno zatočit? (Pro jednoduchost: tyč chceme nést vodorovně.)

2. Dokažte a zapamatujte si následující nerovnosti.

- (a) Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $e^x \geq 1 + x$.
- (b) Pro všechna $x \in (-1, \infty)$ platí $\ln(1 + x) \leq x$.
- (c) Pro všechna $x \in (-1, \infty)$ platí $1 + x \geq e^{\frac{x}{1+x}}$. Ekvivalentně: $\ln(1 + x) \geq \frac{x}{1+x}$.
- (d) pro všechna $x \geq 0$ platí $\sin x \leq x$.

3. $(1 + 1/x)^x$ je rostoucí funkce ($x \in \mathbb{R}^+$).

Taylorův polynom

Zopakujte si, co je to Taylorův polynom stupně n pro funkci $f(x)$ v bodě $x = a$. Jaké věty o něm znáte?

4. Napište Taylorův polynom v nule (stupně např. 5) pro následující funkce

- (a) e^x
- (b) $\log(1 + x)$
- (c) $\sin x$
- (d) $\cos x$
- (e) $(1 + x)^a$

5. Spočítejte přibližně (můžete bez odhadu chyby) následující čísla: $\sin 0.1, \cos 0.1, \sqrt{0.98}, \sqrt[3]{1729.03}, e^{0.01}, \log 1.2, \log 2, \sqrt[12]{1.03}, 1.01^5, \dots$

6. Použitím Taylorova polynomu spočítejte přibližně $\sqrt{2}$ (a další dle libosti) a **odhadněte chybu**. Čili určete interval (a, b) co nejmenší délky, v němž dané číslo leží.

7. Pomocí Taylorova polynomu spočítejte následující limity:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$, (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$,
- (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}))$.

1.414 213

0.099 833, 0.995 004, 0.989 949, 12.002 3, 1.010 050, 0.182 321, 0.693 147, 1.002 466, 1.051 010