

4. zkoušková písemka MA – 15.2.2011

Na každý papír napište: číslo příkladu, jméno a paralelku: X (Šámal) nebo Y (Stará).

1. (10 bodů) Spočítejte následující limitu.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos \frac{3}{n}}{\cos \frac{5}{n}} \right)^{n^2}$$

2. (10 bodů) Rozhodněte, zda následující řada konverguje (pro $\alpha = 0$), a pro která α konverguje absolutně.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n+11}} - 1 \right) n^\alpha$$

(5 bodů konv. + 5 b abs. konv.) Pro abs. konvergenci použijeme limitní srovnávací kritérium, srovnání s řadou $\sum_n n^{\alpha-1}$. (2 body) Využijeme přitom limitu $\frac{1-\cos x}{x^2} \rightarrow 1/2$ a Heineho větu. (2 body za výpočet) Závěr: konverguje pro $\alpha < 0$. (1 bod)
Pro konvergenci použijeme Leibnizovo kritérium. Musíme ověřit, že $a_n = \cos \frac{1}{\sqrt{n+11}} - 1$ je klesající posloupnost (2 body) s limitou 0. (2 body) Závěr: pro $\alpha = 0$ konv. ale ne abs. (1 bod)

3. (10 bodů) Určete definiční obor následující funkce, rozhodněte, ve kterých bodech má funkce derivaci (příp. jednostranné derivace), a spočítete ji (je).

$$f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^2}$$

Odmocnina je definována jen pro kladné výrazy, exponenciála je rostoucí, tudíž $D_f = [1, \infty)$. (1 bod) Na $(1, \infty)$ zderivujeme podle vzorců (5 bodů)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^{2x} - e^2}} 2e^{2x}$$

Derivaci v jedné zprava spočteme podle věty (ověříme, že f je spojitá zprava). Limita je typu $\frac{0}{+0}$, tudíž $f'_+(1) = \infty$. (4 body)

4. (20 bodů) Vyšetřete průběh následující funkce (tj. najděte definiční obor, obor spojitosti, extrémy, inflexní body, asymptoty, vyšetřete monotonii a konvexitu /

konkávnost, chování v krajních bodech definičního oboru, periodicitu a sudost/lichost, nakreslete graf).

$$|x|^{2/3} e^{-x}$$

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Na vypracování máte 120 minut.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítač, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčíslujte je ($137 \cdot 173$ je stejně dobrá, než-li lepší odpověď, než 23701).

Můžete využívat jeden tahák o formátu A4.